



# Physique Statistique et Géométrie

Claire Chevalier

## ► To cite this version:

Claire Chevalier. Physique Statistique et Géométrie. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00332499

**HAL Id: tel-00332499**

**<https://theses.hal.science/tel-00332499>**

Submitted on 21 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DOCTORALE : Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France

**THESE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

Astrophysique

Présentée par Mlle Claire CHEVALIER

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse : **Physique statistique et géométrie**

soutenue le 28 novembre 2007

devant le jury composé de

M. Fabrice DEBBASCH (Maître de conférences)....Directeur de thèse

M. Jean-Pierre PROVOST (Professeur)..... Rapporteur

M. Willem Van LEEUWEN (Professeur)..... Rapporteur

M. Pierre ENCRENAZ (Professeur).....Examineur

M. Jacques FRANCHI (Professeur)..... Examineur

M. Michel MOREAU (Professeur)..... Examineur

*Man is here today and gone tomorrow.*  
p. Sanh. 23*d*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Fabrice pour m'avoir toujours soutenue, et pour m'avoir transmis rigueur, ténacité, efficacité, et aussi le bonheur et l'émerveillement de faire de la science et de découvrir de nouveaux horizons. Je le remercie pour sa gentillesse, sa franchise et sa générosité. Il m'a appris à avoir l'esprit critique et ouvert, à finir ce que j'entreprends, pour ensuite aller plus loin. Il m'a fait découvrir que faire preuve de rationalité et de calme est essentiel et permet de se sortir de nombreux problèmes. Je lui suis pour tout cela infiniment reconnaissante et je garderai ses conseils au delà de la physique tout au long de mon chemin dans la vie. Je tiens également à remercier les membres de mon jury, Pierre Encrenaz, Jacques Franchi, Michel Moreau, Jean-Pierre Provost, Willem van Leeuwen, pour leur aide et leurs précieux conseils, au niveau scientifique mais aussi professionnel. Je remercie tout particulièrement mes deux rapporteurs, Jean-Pierre Provost et Willem van Leeuwen. J'exprime aussi ma profonde gratitude envers Jean-Pierre Rivet, pour ses conseils et son soutien lors des moments difficiles. Je remercie Marc Brachet pour ses conseils qui m'ont beaucoup aidée. Je remercie également Yann Ollivier pour ses conseils, pour son intérêt pour ma recherche et pour son soutien qui m'a permis de réaliser mon travail de thèse dans des conditions optimales. Un grand merci aussi à Miguel Bustamante pour ses conseils qui m'ont beaucoup aidé dans mon travail de thèse. Je tiens à remercier tous les membres de l'ERGA pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux. Je remercie Béatrice Guibal, pour sa gentillesse, sa patience et sa compétence. Finalement, je remercie tout particulièrement mes parents, Odile et Dominique, pour avoir toujours été présents à mes côtés et pour m'avoir toujours soutenue et encouragée sans limite et avec une patience infinie.



Cette thèse a été préparée au laboratoire:

ERGA/LERMA, Université Pierre et Marie Curie,  
3 rue Galilée  
94300 Ivry sur Seine  
France.





# Résumé

## Physique statistique et géométrie.

Cette thèse se compose de deux parties. Une première partie est dédiée à l'étude de phénomènes de diffusions dans des géométries non triviales. Je présente tout d'abord un travail sur les effets des irrégularités de la géométrie d'une surface sur un mouvement brownien galiléen évoluant sur cette surface. Ce problème est susceptible d'applications en biologie, notamment dans la modélisation des phénomènes de diffusions latérales sur des interfaces. J'expose ensuite des travaux réalisés sur des processus stochastiques relativistes. J'introduis d'une part des modèles simples de diffusion dans un univers en expansion et présente des relations de fluctuation-dissipation vérifiées par ces modèles. J'expose d'autre part une approche unifiée des différents processus stochastiques relativistes existant dans la littérature, à savoir, le ROUP, le processus de Franchi-Le Jan et le processus de Dunkel-Hänggi.

Dans une seconde partie, je présente deux applications de la récente théorie champ moyen de la relativité générale. La théorie a été appliquée à un trou noir de Schwarzschild et à un trou noir de Reisner-Nordström extrême. Les caractéristiques de l'espace-temps moyen obtenu dans chacun de ces deux cas sont présentées. Les résultats sont mis en relation avec des observations de trous noirs astrophysiques et avec des observations cosmologiques. Les effets de la moyennisation sur les propriétés thermodynamiques de ces trous noirs sont également étudiés.

**Mots-clés:** Physique statistique, Processus stochastiques, Processus stochastiques relativistes, Relativité générale, Théorie champ moyen, Physique des trous noirs, Cosmologie.



# Abstract

## **Statistical physics and geometry.**

This thesis is divided into two parts. A first part is dedicated to the study of diffusion phenomena in non trivial geometries. First, a work on the effects of irregularities of the geometry of a surface on a Galilean Brownian motion evolving on this surface is presented. This work has potential applications in biology, in modeling lateral diffusion phenomena on interfaces for instance. Studies concerning relativistic stochastic processes are then displayed. On the one hand, simple models of diffusion in an expanding universe are proposed and fluctuation-dissipation relations satisfied by these models are presented. On the other hand, a unified approach of the various relativistic stochastic processes existing in the literature, namely the ROUP, the Franchi-Le Jan process and the Dunkel-Hänggi process, is introduced.

A second part deals with two applications of the recently developed mean field theory for General Relativity. The theory is applied to a Schwarzschild black hole and to an extreme Reisner-Nordström black hole. The characteristics of the mean space-time obtained in each of these applications are presented. The results are linked to observations of astrophysical black holes and to cosmological observations. The effects of the averaging on the thermodynamical properties of these black holes are also investigated.

**Keywords:** Statistical physics, Stochastic processes, Relativistic stochastic processes, General relativity, Mean field theory, Black hole physics, Cosmology.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>I Processus stochastiques sur variétés</b>	<b>25</b>
<b>1 Mouvements browniens sur des surfaces irrégulières</b>	<b>27</b>
1.1 Mouvements browniens sur une variété riemannienne . . . . .	27
1.1.1 Mouvement brownien dans une métrique indépendante du temps . . . . .	27
1.1.2 Mouvement brownien dans une métrique dépendante du temps . . . . .	28
1.1.3 Comment comparer les mouvements browniens dans $g(t)$ et dans $\bar{g}(t)$ ? . . . .	29
1.2 Mouvements browniens sur une surface presque plane . . . . .	31
1.2.1 Présentation du modèle . . . . .	31
1.2.2 Résolution perturbative de l'équation de transport pour la densité $N$ . . . . .	32
1.2.3 Effets des fluctuations de la géométrie sur les aspects grandes échelles de la diffusion . . . . .	34
1.2.4 Moyenne spatiale et moyenne statistique . . . . .	35
<b>2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP)</b>	<b>37</b>
2.1 Présentation du ROUP . . . . .	37
2.2 Le ROUP dans un référentiel inertiel quelconque . . . . .	39
2.3 Formulation manifestement covariante du ROUP . . . . .	41
<b>3 Un modèle de diffusion dans un univers homogène et isotrope</b>	<b>45</b>
3.1 Construction d'une classe d'extensions du ROUP en espace-temps courbe . . . . .	45
3.2 Relations de fluctuation-dissipation dans un univers homogène et isotrope . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Une approche unifiée des différents processus stochastiques relativistes existant</b>	<b>59</b>
4.1	Une façon naturelle de construire des processus stochastiques relativistes . . . . .	59
4.2	Une classe particulière de processus stochastiques relativistes . . .	62
4.2.1	Définition de la classe . . . . .	62
4.2.2	Description de la classe dans un référentiel inertiel quelconque . . . . .	63
4.2.3	Equation de transport manifestement covariante . . . . .	65
4.3	Processus particuliers de la classe . . . . .	66
4.3.1	Le ROUP . . . . .	66
4.3.2	Le processus de Franchi-Le Jan . . . . .	67
4.3.3	Le processus de Dunkel-Hänggi . . . . .	68
4.4	Un théorème $H$ pour l'ensemble des processus de la classe . . . .	70
<b>II</b>	<b>Etude de quelques applications d'une théorie champ moyen pour la relativité générale</b>	<b>73</b>
<b>5</b>	<b>Généralités</b>	<b>75</b>
<b>6</b>	<b>Présentation de la théorie</b>	<b>77</b>
<b>7</b>	<b>Etude de deux applications de la théorie</b>	<b>81</b>
7.1	Une première application: espace-temps moyen associé à un ensemble de trous noirs de Schwarzschild . . . . .	81
7.1.1	Définition de la famille d'espace-temps considérée et détermination de la métrique moyenne . . . . .	81
7.1.2	L'espace-temps moyen décrit un trou noir . . . . .	82
7.1.3	Tenseur d'énergie-impulsion moyen . . . . .	85
7.1.4	Masse totale du trou noir moyen . . . . .	88
7.1.5	Température du trou noir moyen . . . . .	89
7.1.6	Observations de trous noirs astrophysiques . . . . .	91
7.2	Une deuxième application: espace-temps moyen associé à un ensemble de trous noirs extrêmes complexes . . . . .	94
7.2.1	Motivation . . . . .	94
7.2.2	L'espace-temps moyen décrit un trou noir réel . . . . .	95
7.2.3	Propriétés de la matière présente à l'extérieur du trou noir . . . . .	96
7.2.4	Propriétés thermodynamiques de l'espace-temps moyen . . . . .	99

<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>101</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>106</b>
<b>Annexe 1: Publications dans des revues à comité de lecture</b>	<b>117</b>
C. Chevalier and F. Debbasch: Multi-scale diffusion on an inter- face. <i>Eur. Phys. Lett.</i> , 77:20005–20009, 2007 . . . . .	119
C. Chevalier and F. Debbasch: Is Brownian motion sensitive to geometry fluctuations? <i>Submitted to J. Stat. Phys.</i> . . . . .	127
C. Chevalier and F. Debbasch: Fluctuation-Dissipation Theorems in an Expanding Universe. <i>J. Math. Phys.</i> , 48:023304, 2007	147
C. Chevalier and F. Debbasch: Relativistic diffusions: a unifying approach. <i>Submitted to J. Math. Phys.</i> . . . . .	161
C. Chevalier and F. Debbasch: A unifying approach to relativistic diffusions and H-theorems. <i>Accepted for publication in</i> <i>Mod. Phys. Lett. B</i> . . . . .	185
C. Chevalier, M. Bustamante and F. Debbasch. Thermal Statistical Ensembles of Black Holes. <i>Phys. A</i> , 376:293-307, 2007 .	197
C. Chevalier, F. Debbasch and J.P. Rivet: A stochastic approach to thermodiffusion. <i>Submitted to Eur. Phys. Lett.</i> . . . . .	215
<b>Annexe 2: Actes de congrès</b>	<b>221</b>
F. Debbasch and C. Chevalier: Relativistic Stochastic Processes. In O. Descalzi, O.A. Rosso and H.A. Larrondo, editors, Proceedings of ‘Medyfinol 2006, Nonequilibrium Statis- tical Mechanics and Nonlinear Physics, XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, Mar del Plata, Argentina, Dec. 4-8 2006’. Ame- rican Institute of Physics, A.I.P. Conference Proceedings 913, Melville, NY, 2007 . . . . .	223
C. Chevalier and F. Debbasch. Brownian motion and entropy growth on irregular surfaces. Submitted in ‘Proceedings of Ana- lysis and simulation of multiscale nonlinear systems, Ore- gon State University, Corvallis, Oregon, 2007’ . . . . .	233
C. Chevalier and F. Debbasch: Is matter an emergent property of space-time? Submitted for publication to the Procee- dings of the International Conference on Complex Sys- tems, Boston, 2007 . . . . .	251





# Introduction

Un des problèmes les plus fréquents rencontrés en physique est celui de remplacer, pour un système donné, une description ‘fine’ faisant intervenir à la fois des degrés de liberté observables et non observables par une description ‘moins fine’ ne faisant intervenir que des degrés de liberté observables. De manière générale, la nature et le nombre de variables utilisées pour décrire un système donné dépendent du niveau de description retenu. Prenons l’exemple classique de l’hydrodynamique. D’un point de vue fondamental, un fluide non quantique non relativiste peut être vu comme une collection de particules ponctuelles en interaction, dont l’évolution vérifie les lois hamiltoniennes de la mécanique classique [85, 74]. Sur des échelles supérieures ou égales au libre parcours moyen et au temps moyen de collision entre les particules, l’état d’un fluide suffisamment dilué peut être décrit par une fonction de distribution dans l’espace des phases à une particule et cette distribution vérifie une équation de transport, typiquement l’équation de Boltzmann [87, 74]; notons que cette équation, à la différence des équations du mouvement hamiltoniennes de la mécanique classique, est irréversible. Il s’avère que le comportement des solutions de l’équation de Boltzmann qui varient sur des échelles macroscopiques, c’est-à-dire, des échelles très grandes devant le libre parcours moyen et le temps moyen de collision, peut être modélisé efficacement par le système de Navier-Stokes; l’état du fluide est maintenant représenté par un champ de densité, un champ de vitesse et un autre champ, thermodynamique, comme la température [20, 74, 88]. Bien sûr, les équations du mouvement doivent être complétées par une équation d’état, qui lie les différentes quantités thermodynamiques à la densité du fluide; l’équation d’état doit être obtenue par une analyse statistique. Passons un peu de temps à commenter le modèle de Navier-Stokes. Une solution du système de Navier-Stokes correspondant à un écoulement turbulent aura un spectre large dans l’espace de Fourier, ce qui sera aussi probablement le cas pour une solution typique, variant de façon significative sur plus que juste une échelle macroscopique. Supposons pour le moment, en tant qu’approximation, qu’une solution particulière ne contient que deux échelles de variations, disons  $L_1$  et  $L_2$ , avec  $L_1 \ll L_2$ . Ces deux échelles sont macroscopiques, mais supposons, que pour une certaine raison, l’on cherche une description ap-

proximative de l'écoulement sur l'échelle  $L_2$  seulement. On peut introduire une procédure de moyenne adaptée qui fournisse, à partir de la 'vraie' densité, du 'vrai' champ de vitesse et du 'vrai' champ de température du fluide, de nouveaux champs, qui varient seulement sur l'échelle  $L_2$ . Le point important est que, de façon générale, ces champs ne vérifient pas un système similaire au système de Navier-Stokes originel. En particulier, l'équation de Navier-Stokes n'est pas vérifiée, en général, par les champs moyennés. Ceci est dû à la non-linéarité du système de Navier-Stokes originel. On ne rencontre pas ce type de problème lors de la construction d'une théorie des phénomènes électromagnétiques dans les milieux continus car les équations de Maxwell sont linéaires. Dans certains cas simples, les changements qui apparaissent dans le modèle hydrodynamique de Navier-Stokes se ramènent à une renormalisation de la viscosité; la viscosité renormalisée s'appelle viscosité tourbillonnaire (ou encore 'eddy viscosity'), et a été introduite en 1868 par J. Boussinesq [11]; le lecteur trouvera une présentation détaillée de plusieurs résultats analytiques et de leurs confirmations expérimentales dans [63].

L'exemple ci-dessus concerne un système physique (un fluide) galiléen évoluant en espace-temps plat. La géométrie du problème est donc pour ainsi dire triviale et la richesse des phénomènes ne provient que des aspects statistiques. Mais il existe de nombreuses situations d'intérêt physique et mathématique évident nécessitant la description statistique d'un système physique évoluant dans des géométries non triviales. Mon travail a été centré sur l'étude de tels systèmes.

Une première partie de ma thèse est consacrée à l'étude de phénomènes de diffusions dans des géométries non triviales. Je me suis d'abord intéressée à la phénoménologie du processus de diffusion galiléen le plus simple, le mouvement brownien [56, 102, 6], évoluant sur une surface bi-dimensionnelle dont la géométrie présente des irrégularités. Il s'agit d'un problème qui présente un intérêt biophysique très important car les diffusions sur des interfaces jouent un rôle crucial en biologie. Par exemple, les phénomènes de diffusions latérales de molécules dans des membranes cellulaires sont essentiels dans le développement d'une cellule et dans les interactions de cette cellule avec son environnement [14, 96]. Une membrane cellulaire peut être approximativement décrite comme une surface dont la géométrie varie sur différentes échelles spatiales et temporelles. La géométrie de cette surface est considérée comme présentant des irrégularités de faible amplitude autour d'une géométrie moyenne. Les échelles de variations spatiales et temporelles de ces irrégularités sont très petites devant les échelles de variations spatiales et temporelles de la géométrie moyenne. Dans la suite, j'appellerai grandes échelles les échelles de variation de la géométrie moyenne, et petites échelles les échelles de variation inférieures aux grandes échelles. Dans les modèles standards de diffusions sur une membrane cellulaire, seule la géométrie moyenne de la surface est prise en compte [14, 1, 13, 36, 104]. Mais peut-on négliger les effets des

irrégularités de la géométrie sur les aspects grandes échelles des phénomènes de diffusion? Afin d'apporter une première réponse à cette question, F. Debbasch et moi-même avons développé des outils qui permettent de comparer un mouvement brownien dans la 'vraie' géométrie à un mouvement brownien dans la géométrie moyenne [33, 25, 28]. Nous avons pour cela modélisé une interface biologique par une unique variété de base, munie de deux métriques riemaniennes: une métrique qui décrit la géométrie moyenne de l'interface et une métrique qui représente la 'vraie' géométrie de l'interface. Pour plus de généralité, nous avons considéré la métrique moyenne et la 'vraie' métrique comme dépendantes du temps. Nous avons donc été amenés à étendre la définition usuelle du mouvement brownien sur une variété riemannienne [97] au cas où la géométrie de cette variété dépend du temps. Nous avons comparé le comportement sur les grandes échelles d'un mouvement brownien dans la 'vraie' métrique à celui d'un mouvement brownien dans la métrique moyenne dans le cas particulier d'une surface presque plane, c'est-à-dire d'une surface dont la géométrie présente des irrégularités de faible amplitude, autour de la géométrie du plan. Nous avons réalisé des calculs perturbatifs sous forme de développements en puissances de l'amplitude des irrégularités. Ces calculs perturbatifs indiquent que les irrégularités de la géométrie ont, à toutes les échelles [25], un effet cumulatif sur la diffusion Brownienne et que cet effet augmente de façon exponentielle avec le temps. Ainsi, il apparaît, dans ce cadre perturbatif, qu'au bout d'un temps caractéristique qui dépend de l'amplitude des irrégularités et de l'échelle à laquelle la diffusion est observée, le mouvement brownien sur la surface presque plane diffère du mouvement brownien usuel sur le plan [25]. Ce travail semble donc indiquer qu'on ne peut pas décrire, même sur les grandes échelles, un mouvement brownien sur une surface presque plane par un modèle de diffusion usuel sur le plan, et qu'il pourrait être nécessaire de développer des modèles prenant en compte les irrégularités de la géométrie. Les phénomènes de diffusion galiléenne sur des surfaces presque planes sont des cas particuliers de mouvements se déroulant dans des géométries qui varient sur différentes échelles. Dans cette perspective plus large, notre travail suggère qu'il n'est pas trivial de pouvoir approximer un mouvement moyen par un mouvement dans la géométrie moyenne, et qu'il serait important d'étudier les effets des irrégularités de la géométrie sur les aspects grandes échelles de ces mouvements.

Cette problématique se pose de façon évidente dans le domaine de la cosmologie. L'univers sur les grandes échelles est en effet décrit par un modèle homogène et isotrope, mais présente des inhomogénéités autour de cette géométrie moyenne [84, 99] et il apparaît que les phénomènes de diffusion cosmologiques jouent un rôle important dans l'univers. Les diffusions de certains éléments dans l'univers primordial semblent avoir eu une influence importante sur les abondances primordiales de ces éléments [93, 37]. Lors de la formation des structures, les diffusions d'éléments générés lors de la nucléosynthèse primordiale, comme le deutérium,

l'hélium et le lithium, ont été plus importantes dans des régions en surdensité que dans d'autres régions. Ces diffusions ont généré des écarts relatifs par rapport aux abondances primordiales de ces éléments. Ces écarts relatifs, qui sont de l'ordre de 0,1%, s'approchent de la précision avec laquelle les abondances primordiales sont aujourd'hui mesurées. Le travail présenté dans [93] indique qu'il serait nécessaire de prendre en compte ces phénomènes de diffusion pour estimer correctement les abondances primordiales et pour affiner le modèle de nucléosynthèse primordiale. De plus, l'étude de ces diffusions pourrait permettre de mieux connaître les mécanismes de formation des structures dans l'univers primordial.

Un premier pas dans l'étude de ce problème consiste à construire des modèles de diffusion relativistes aussi réalistes que possible; un second est de préparer l'étude de ces modèles dans un univers avec fluctuations par l'étude de cas simples, par exemple celle de diffusions en espace-temps plat ou dans un univers homogène isotrope. C'est à ce dernier type de problèmes qu'est consacré le deuxième volet de la première partie de mon travail de thèse.

En 1997, F. Debbasch, K. Mallick et J.-P. Rivet ont introduit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP) [46]. Le ROUP est un modèle de phénomène irréversible relativiste; il décrit la diffusion d'une particule relativiste plongée dans un fluide relativiste isotrope à l'équilibre thermodynamique global. Le ROUP a été initialement étudié dans le référentiel propre du fluide, noté  $\mathcal{R}_F$  [46]. En 2001, C. Barbachoux, F. Debbasch et J.-P. Rivet ont généralisé l'étude du ROUP à un référentiel inertiel quelconque [8] et ils ont également construit une équation de transport manifestement covariante [7]. Dans ce processus, l'action du fluide sur la particule qui diffuse est représentée par deux contributions. La première est une force déterministe de frottement fluide qui, dans le référentiel  $\mathcal{R}_F$ , est proportionnelle à la vitesse de la particule dans ce référentiel. La seconde contribution est stochastique; elle est choisie comme étant proportionnelle à un bruit blanc gaussien isotrope dans le référentiel  $\mathcal{R}_F$ . Ce processus est donc caractérisé par deux coefficients constants: un coefficient de frottement fluide et un coefficient de bruit.

F. Debbasch a introduit en 2003 une première extension du ROUP dans le cadre de la relativité générale [42]. De même que pour le ROUP en relativité restreinte, la force qui agit sur la particule est caractérisée par deux coefficients constants, un coefficient de frottement et un coefficient de bruit. Il est particulièrement intéressant d'étudier cette extension du ROUP dans l'espace-temps de Friedmann-Robertson-Walker spatialement plat; la grande symétrie de cet espace-temps facilite en effet les calculs exacts et les observations cosmologiques récentes [9, 109, 38] indiquent que cet espace-temps homogène et isotrope constitue un modèle réaliste pour décrire l'univers sur les échelles cosmologiques.

Le contenu en matière de l'univers est modélisé, dans le cadre de Friedmann-Robertson-Walker, par un fluide parfait, usuellement appelé fluide cosmologique.

Le référentiel propre de ce fluide est appelé repère comobile et le temps associé à ce repère est le temps comobile  $t$  [113, 84]. Le modèle introduit par F. Debbasch dans [42] décrit la diffusion d'une particule relativiste dans le fluide cosmologique. Le processus a naturellement été étudié dans le repère comobile. Dans ce repère comobile, les composantes de la métrique de Friedmann-Robertson-Walker sont entièrement déterminées par une seule quantité, qui dépend uniquement du temps comobile: le facteur d'expansion [113]. De même que la métrique de Friedmann-Robertson-Walker, l'état thermodynamique du fluide cosmologique évolue avec le temps comobile. Cette évolution implique que l'état thermodynamique du fluide est décrit par une température dépendant du temps comobile [84]. On notera cette température  $\Theta(t)$ . On peut donc s'attendre physiquement à ce que des modèles raisonnables de phénomènes de transport dans un univers en expansion admettent comme solution la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  de l'univers. Or, F. Debbasch a montré dans [42] que le modèle simple de diffusion dans un univers en expansion présenté ici n'admettait pas la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  comme fonction de distribution dans l'espace des phases de la particule. Ce résultat est mathématiquement une conséquence du fait que les coefficients caractérisant le processus sont constants. Le même problème se pose pour une autre équation de transport: l'équation de Boltzmann relativiste. En effet, il a été montré [10] que la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  de l'univers n'est pas solution de l'équation de Boltzmann relativiste<sup>1</sup>. Ceci est mathématiquement dû au fait que la section efficace de collision qui intervient dans l'équation de Boltzmann relativiste est constante et ne dépend pas du temps comobile. Le fait que l'équation de Boltzmann n'admette pas comme solution la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  a d'ailleurs suscité de nombreuses discussions [108].

Analysons le problème plus en détail dans le cadre d'une modélisation du transport à l'aide de processus stochastiques. Les coefficients fixant l'amplitude de la force de frottement et de la force stochastique ressenties par une particule diffusant dans un fluide sont des grandeurs microscopiques ou mésoscopiques; elles dépendent à la fois de la morphologie de la particule et de l'état thermodynamique, local ou global, du fluide induisant la diffusion. Les équations d'Einstein,

---

<sup>1</sup>Il convient de préciser que la littérature contient malheureusement plusieurs équations différentes, non démontrées (voir par exemple [21, 22, 23, 55, 94, 76, 10]), toutes présentées comme l'équation de Boltzmann relativiste. La première dérivation complète d'un analogue relativiste de l'équation de Boltzmann, analogue obtenu comme équation bilan dans l'espace des phases, a été développée par F. Debbasch et W. van Leeuwen, et sera bientôt soumise à Physica A; l'équation obtenue est identique à certaines des équations déjà proposées, notamment celle écrite par W. Israel [76]. La distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  n'est pas solution de cette équation; il se trouve qu'elle n'est d'ailleurs solution d'aucune des équations dites de Boltzmann proposées dans la littérature

adjointes de l'équation d'état du fluide cosmologique, couplent l'expansion à grande échelle et l'état thermodynamique du fluide cosmologique, qui dépend ainsi du temps cosmologique  $t$ . Il est donc naturel de s'attendre à ce que cette dépendance de l'état du fluide cosmologique par rapport au temps comobile  $t$  induise une dépendance du coefficient de frottement et du coefficient de bruit par rapport à  $t$ . F. Debbasch et moi-même avons donc considéré une nouvelle classe de processus stochastiques dans un univers en expansion [31, 32]. Les processus de cette classe sont toujours des processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisés en espace-temps courbe, mais ils sont maintenant caractérisés par un coefficient de frottement et un coefficient de bruit qui dépendent du temps. Nous avons montré que ces processus admettent comme fonction de distribution dans l'espace des phases la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  à condition que les coefficients caractéristiques de ces processus dépendent, en plus du temps comobile  $t$ , de l'énergie de la particule dans le repère comobile. Ces coefficients sont alors reliés à la température du fluide et au facteur d'expansion de l'univers par une certaine équation différentielle. Cette équation différentielle constitue donc une relation de fluctuation-dissipation dans un univers en expansion sous forme différentielle. Nous avons résolu cette équation différentielle de façon exacte et obtenu une relation de fluctuation-dissipation dans un univers en expansion sous forme intégrale [32].

Jusqu'à présent, j'ai évoqué le travail que j'ai effectué dans le cadre des extensions directes du ROUP. Or, depuis la création de ce processus en 1997, d'autres processus stochastiques relativistes ont été construits par différents auteurs: le processus de Franchi-Le Jan [62, 61, 4, 45] et le processus de Dunkel-Hänggi [53, 54, 45]. Le processus de Franchi-Le Jan ne décrit pas le mouvement d'une particule diffusant par son interaction avec un fluide newtonien environnant. En particulier, ce processus ne contient pas de force de frottement ramenant la vitesse de la particule diffusante à celle d'un fluide environnant. Il a été suggéré que ce processus pourrait être interprété physiquement comme un modèle de diffusions induites par des interactions avec les degrés de liberté quantiques du champ de gravitation [50]. Comme il n'y a pas de fluide newtonien environnant, aucun champ de vitesse ou de température qui serait associé à un tel fluide n'est à considérer dans la construction du processus de Franchi-Le Jan; seule intervient dans la définition du processus la géométrie de l'espace-temps, ce qui confère à ce processus un intérêt mathématique évident: il est invariant par le groupe des isométries lorentziennes, quelle que soit la variété lorentzienne considérée [4, 62]. Le processus de Dunkel-Hänggi peut être décrit comme un mélange du ROUP et du processus de Franchi-Le Jan <sup>2</sup>. Dans le but d'apporter une vision unifiée de ces processus, F. Debbasch et moi-même avons construit une nouvelle classe de

---

<sup>2</sup>Pour plus de détails, le lecteur est invité à se reporter à la section 4.3.3

processus stochastiques, et montré que le processus d’Ornstein-Uhlenbeck relativiste, le processus de Franchi-Le Jan et le processus de Dunkel-Hänggi étaient trois processus particuliers de cette classe [34, 27]. Tous les processus de cette classe sont des processus d’Ornstein-Uhlenbeck généralisés. La force qui agit sur la particule qui diffuse est donc constituée de deux contributions différentes: une force déterministe et une force stochastique. Pour chaque processus de la classe et chaque point de la trajectoire de la particule dans l’espace de phases, il existe un référentiel inertiel, dépendant du processus et du point, dans lequel la force stochastique est un bruit blanc gaussien isotrope. Chaque processus de la classe est individualisé en choisissant ce référentiel inertiel en chaque point de la trajectoire et la force déterministe. Nous avons obtenu les équations définissant la classe dans un référentiel inertiel quelconque, et nous avons également établi une équation de transport manifestement covariante [34, 27]. Nous avons utilisé cette formulation manifestement covariante pour démontrer un nouveau théorème  $H$ , valable pour l’ensemble des processus de la classe [34]. La partie conceptuelle de ce travail, c’est-à-dire la définition de la classe, a été développée dans un espace-temps quelconque, plat ou courbe; les calculs complets ont été réalisés en espace-temps plat.

La deuxième partie de ma thèse est consacrée au problème de moyennisation du champ de gravitation relativiste. La construction d’une théorie champ moyen pour la relativité générale est un problème difficile, notamment car les équations d’Einstein sont non linéaires, et constitue un sujet actif de recherche depuis une quinzaine d’années [64, 81, 64, 65, 115, 15, 16]. F. Debbasch a finalement introduit en 2004 la première théorie champ moyen de la gravitation d’Einstein [43, 44]. J’ai contribué dans ma thèse au développement, à l’application et à la compréhension de cette nouvelle théorie champ moyen.

Considérons un certain espace-temps physique. Les quantités caractéristiques de cet espace-temps varient *a priori* sur plusieurs échelles. Parmi ces échelles, certaines sont accessibles aux observations, d’autres ne le sont pas. Dans la suite, les échelles accessibles aux observations sont appelées grandes échelles et celles qui ne le sont pas sont appelées petites échelles. Pour des raisons pratiques, la théorie champ moyen introduite en 2004 est construite en remplaçant les moyennes sur les petites échelles spatiales et temporelles des quantités caractéristiques de l’espace-temps physique considéré, qu’il s’agisse du champ de gravitation ou de toute quantité associée à la matière présente dans cet espace-temps, par des moyennes sur une famille de métriques définies sur une même variété de base, ces métriques étant identiques sur les grandes échelles mais différentes sur les petites échelles<sup>3</sup>. F. Debbasch a montré dans [43] que l’on peut construire un espace-temps

---

<sup>3</sup>L’équivalence pratique entre ces deux types de moyenne a été prouvée dans le cas de l’étude des aspects grandes échelles d’un mouvement brownien sur une surface presque plane. Ce point est discuté dans la section 1.2.4

moyen unique associé à cette famille de métriques. Cet espace-temps moyen a pour variété de base la variété de base commune à toutes les métriques de la famille et il est muni d'une métrique moyenne, définie comme la moyenne des métriques de la famille. Cette définition a l'avantage d'assurer qu'une géodésique du champ moyen peut être interprétée, au moins localement, comme la moyenne de géodésiques du champ non moyenné [44]. Les degrés de liberté microscopiques du champ de gravitation, qui ont été lissés par la procédure de moyenne, se manifestent au niveau macroscopique sous la forme d'une matière présente dans l'espace-temps moyen. Ainsi des régions vides d'un certain espace-temps non moyenné apparaîtront généralement non vides après application de la procédure de moyenne. Afin de mieux comprendre les mécanismes et les implications de cette nouvelle théorie, j'ai travaillé sur deux applications simples.

Un des espace-temps non triviaux les plus simples de la relativité générale est le trou noir de Schwarzschild [70, 113]. Le trou noir de Schwarzschild est une solution du vide, statique à symétrie sphérique, des équations d'Einstein; ce trou noir est complètement caractérisé par un unique paramètre: sa masse totale. F. Debbasch et Y. Ollivier ont introduit en 2005 une famille d'espace-temps décrivant un trou noir de Schwarzschild observé avec une précision finie dans les coordonnées spatiales de Kerr-Schild [19] et ont étudié l'espace-temps moyen associé à cette famille de façon perturbative [47]. Dans le cadre de ma thèse, je me suis intéressée à cette famille d'espace-temps et j'ai étendu les résultats obtenus dans [47] en réalisant des calculs exacts [29, 30, 24]. Les résultats obtenus par ces calculs exacts sont les suivants. L'espace-temps moyen décrit un trou noir à symétrie sphérique, et ce tant que la résolution des observations est inférieure à la taille caractéristique du trou noir non moyenné. La procédure de moyenne modifie le rayon de l'horizon du trou noir: le rayon de l'horizon du trou noir moyen dépend non seulement de la masse du trou noir de Schwarzschild, mais aussi de la résolution des observations. Le trou noir moyen, contrairement au trou noir de Schwarzschild non moyenné, n'est pas une solution du vide des équations d'Einstein. Il est en effet entouré d'une matière qui représente les effets cumulatifs sur les grandes échelles des degrés de liberté microscopiques du champ de gravitation qui ont été éliminés du champ de gravitation moyen par la procédure de moyenne. Cette matière, que l'on peut qualifier d'apparente, dans le sens où sa présence a pour origine la procédure de moyenne, est caractérisée par une densité d'énergie négative et un tenseur de pression anisotrope; notons que la pression radiale est l'opposé de la densité d'énergie. D'autre part, nous avons montré que la masse totale du trou noir, définie comme la masse ADM [113], n'était pas modifiée par la procédure de moyenne. Nous avons finalement évalué la température du trou noir moyen. Cette température a été définie et calculée comme la température de Hawking de l'horizon [113, 114, 71]. Elle mesure la périodicité en temps imaginaire de l'espace-temps euclidien associé au trou noir et



représente donc la seule température d'équilibre possible pour des champs quantiques à l'extérieur de l'horizon [60, 69, 89]. Nous avons déterminé l'expression de cette température en fonction de la masse du trou noir et de la résolution des observations; cette température est bien sûr différente de celle du trou noir de Schwarzschild [24]. Les résultats que nous avons obtenus sur cet exemple simple d'application de la théorie champ moyen présentent un intérêt important du point de vue pratique comme du point de vue théorique.

Plaçons-nous tout d'abord du point de vue pratique. Les observations réalisées sur des objets compacts sont de plus en plus nombreuses. Certains de ces objets, en raison de leur densité massique très élevée constituent des candidats trous noirs astrophysiques [59]. Le candidat trou noir le plus proche de nous est Sagittarius A\*, situé au centre de notre galaxie [106]. Les observations actuelles des trajectoires des étoiles en mouvement autour du centre galactique permettent d'avoir une estimation indirecte de la masse de Sagittarius A\* [67, 107]. D'autre part, la progression dans les techniques d'imagerie à haute résolution devrait permettre prochainement de mesurer la taille de Sagittarius A\*, ce qui pourrait permettre d'accéder directement à la masse de cet objet [12, 49, 95]. Notre modèle indique que quelle que soit la résolution des observations, la masse obtenue par l'intermédiaire des observations n'est pas entâchée d'un biais systématique induit par la précision finie des observations et que cette masse est bien la masse de l'objet central; par contre, dans le cadre de notre modèle, la taille caractéristique du trou noir observé avec une précision finie dépend non seulement de la masse de ce trou noir mais aussi de la précision des observations. Il apparaît donc nécessaire de construire des modèles tenant compte de la précision finie des observations pour déduire des données qui seront obtenues par imagerie à haute résolution une estimation correcte de la masse de Sagittarius A\*.

Les résultats que nous avons obtenus présentent également un intérêt théorique important. Nous avons en effet mis en évidence que la procédure de moyenne modifiait la température du trou noir. Or on considère aujourd'hui que la température d'un trou noir représente la répartition des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation dans l'espace des états quantiques de ce dernier [73]. Notre travail suggère donc que la procédure de moyenne a, comme on peut s'y attendre, un effet sur le comptage des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation dans son espace des états.

Afin d'explorer davantage ces liens entre moyenne d'espace-temps et répartition des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation, nous nous sommes intéressés aux trous noirs de Reisner-Nordström extrêmes [70, 19]. Le trou noir de Reisner-Nordström extrême est une solution statique à symétrie sphérique des équations d'Einstein-Maxwell; le trou noir de Reisner-Nordström extrême est caractérisé par une masse totale et par une charge totale égale en valeur absolue à sa masse totale. Ce trou noir présente la propriété thermodynamique intéressante

d'avoir une température nulle [113]. Nous avons donc cherché à savoir si l'on pouvait obtenir un trou noir de température non nulle en appliquant à un trou noir de Reisner-Nordström extrême une procédure de moyenne similaire à celle que nous avons utilisée pour le trou noir de Schwarzschild. L'espace-temps moyen que nous avons ainsi obtenu ne décrit plus un trou noir. Nous avons alors introduit une généralisation complexe de la procédure de moyenne présentée précédemment [26]. Plus précisément, nous avons introduit une famille d'espace-temps complexes, chacun de ces espace-temps décrivant un trou noir de Reisner-Nordström extrême complexe. Nous avons construit à partir de cette famille un espace-temps moyen, qui décrit un trou noir réel de température finie, non nulle. La masse ADM et la charge totale de l'espace-temps moyen ont également été évaluées, et elles se sont révélées identiques à celles du trou noir extrême d'origine. Nous avons aussi montré que la procédure de moyenne engendre, à l'extérieur de l'horizon, une matière apparente caractérisée par une densité d'énergie positive, un tenseur des pressions anisotropes définis négatifs, de pression radiale opposée à la densité d'énergie, et une densité de charge non nulle, de signe opposé à celui de la charge  $Q$  du trou noir non moyenné [26].

Le corps de ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre est consacré aux phénomènes de diffusion dans des géométries non triviales. La première partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de mouvements browniens non relativistes sur des surfaces irrégulières. Dans la deuxième partie, je rappelle les propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste, puis dans la troisième partie, je présente le modèle de diffusion dans un univers homogène et isotrope en expansion. Finalement, la quatrième partie est consacrée à l'approche unifiée des différents processus stochastiques relativistes existant dans la littérature. Le second chapitre concerne la théorie champ moyen de la relativité générale et ses premières applications. La première partie est une présentation de cette théorie champ moyen et de ses implications. Dans la seconde partie, je développe les deux applications que j'ai considérées dans ma thèse: l'étude d'une famille de trous noirs de Schwarzschild puis l'étude d'une famille de trous noirs de Reisner-Nordstrom extrêmes complexes.

**Notations** Dans tous les chapitres qui suivent, la masse  $m$  de la particule qui diffuse, ainsi que la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ , la constante de Boltzmann  $k_B$  et la constante de gravitation  $G$  sont toutes prises égales à 1. Les métriques lorentziennes ont pour signature  $(+, -, -, -)$ .

# **Partie I**

## **Processus stochastiques sur variétés**



# Chapitre 1

## Mouvements browniens sur des surfaces irrégulières

### 1.1 Mouvements browniens sur une variété riemannienne

On considère une variété [105, 51] de base  $\mathcal{B}$ , de dimension  $d$ , munie d'une métrique riemannienne  $g$ . Nous allons voir comment on peut définir un mouvement brownien dans la métrique  $g$ , en commençant par le cas où  $g$  ne dépend pas du temps.

#### 1.1.1 Mouvement brownien dans une métrique indépendante du temps

La métrique  $g$  induit un élément de volume appelé  $d\text{Vol}_g$  sur  $\mathcal{B}$  [51]. Considérons un système de coordonnées arbitraire  $C$  défini sur  $\mathcal{B}$ , et soient  $x = (x^i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , les coordonnées associées à  $C$ . On a, dans  $C$ :

$$d\text{Vol}_g = \sqrt{\det g_{ij}} d^d x, \quad (1.1)$$

où les  $g_{ij}$  représentent les composantes de la métrique  $g$  dans  $C$ .

Le mouvement brownien dans la métrique  $g$  peut être défini par l'équation de transport vérifiée par sa densité  $n$  par rapport à l'élément de volume  $d\text{Vol}_g$  [77, 78, 92, 58, 75, 97]:

$$\partial_t n = \chi \Delta_g n, \quad (1.2)$$

où  $\chi$  est un coefficient de diffusion, et  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé la métrique  $g$  [51]. Cet opérateur s'écrit, dans le système de coordonnées

C:

$$\Delta_g n = \frac{1}{\sqrt{\det g_{kl}}} \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}} g^{ij} \partial_j n \right), \quad (1.3)$$

où  $\partial_i = \partial / \partial x^i$ . L'équation (1.2) assure la normalisation de  $n$  par rapport à  $d\text{Vol}_g$  à tout instant:

$$\int_{\mathcal{B}} n d\text{Vol}_g = 1 \quad \forall t. \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Mouvement brownien dans une métrique dépendante du temps

On se place maintenant dans le cas plus général où la métrique  $g$  dépend du temps. La définition établie précédemment pour un mouvement brownien dans  $g$  ne peut plus être utilisée, car l'équation de transport (1.2) n'assure plus la normalisation de  $n$  par rapport à l'élément de volume  $d\text{Vol}_{g(t)}$ . En effet, on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} n d\text{Vol}_{g(t)} &= \int_{\mathcal{B}} (\partial_t n) d\text{Vol}_{g(t)} + \int_{\mathcal{B}} n \partial_t d\text{Vol}_{g(t)} \\ &= \chi \int_{\mathcal{B}} (\Delta_g n) d\text{Vol}_{g(t)} + \int_{\mathcal{B}} n \partial_t d\text{Vol}_{g(t)} \\ &= \int_{\mathcal{B}} n \partial_t d\text{Vol}_{g(t)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Or, comme la métrique  $g$  dépend du temps:

$$\int_{\mathcal{B}} n \partial_t d\text{Vol}_{g(t)} \neq 0. \quad (1.6)$$

Nous avons ainsi été amenés à construire une généralisation simple de l'équation (1.2), qui assure la conservation de la normalisation de  $n$  par rapport à  $d\text{Vol}_g$  lorsque  $g$  dépend du temps. On introduit pour cela une métrique indépendante du temps quelconque sur  $\mathcal{B}$ . Cette métrique est appelée  $\delta$ . L'élément de volume induit par  $\delta$  sur  $\mathcal{B}$  est noté  $d\text{Vol}_\delta$ .

Le mouvement brownien dans la métrique  $g(t)$  est défini par l'équation de transport suivante pour sa densité  $n$  par rapport à  $d\text{Vol}_{g(t)}$ :

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\delta}} \partial_t \left( \mu_{g(t)|\delta} n \right) = \chi \Delta_{g(t)} n, \quad (1.7)$$

où  $\mu_{g(t)|\delta}$  est la densité de  $d\text{Vol}_{g(t)}$  par rapport à  $d\text{Vol}_\delta$ , définie par:

$$d\text{Vol}_{g(t)} = \mu_{g(t)|\delta} d\text{Vol}_\delta. \quad (1.8)$$

L'équation (1.7) assure la normalisation de  $n$  par rapport à  $d\text{Vol}_{g(t)}$  à chaque instant:

$$\int_{\mathcal{B}} n d\text{Vol}_{g(t)} = 1 \quad \forall t. \quad (1.9)$$

En effet, on a, d'après (1.8):

$$\int_{\mathcal{B}} n d\text{Vol}_{g(t)} = \int_{\mathcal{B}} n \mu_{g(t)|\delta} d\text{Vol}_{\delta}. \quad (1.10)$$

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} n d\text{Vol}_{g(t)} &= \int_{\mathcal{B}} \partial_t (n \mu_{g(t)|\delta}) d\text{Vol}_{\delta} \\ &= \chi \int_{\mathcal{B}} \Delta_{g(t)} n \mu_{g(t)|\delta} d\text{Vol}_{\delta} \\ &= \chi \int_{\mathcal{B}} (\Delta_{g(t)} n) d\text{Vol}_{g(t)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

En transcrivant l'équation de transport (1.7) dans  $C$ , on obtient:

$$\partial_t (\sqrt{\det g_{kl}} n) = \chi \partial_i (\sqrt{\det g_{kl}} g^{ij} \partial_j n), \quad (1.12)$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^d} n(t, x) \sqrt{\det g_{ij}(t)} d^d x = 1 \quad \forall t. \quad (1.13)$$

L'équation (1.12) met en évidence que la définition (1.7) du mouvement brownien dans la métrique  $g(t)$  ne dépend pas de la métrique  $\delta$ .

### 1.1.3 Comment comparer les mouvements browniens dans $g(t)$ et dans $\bar{g}(t)$ ?

Considérons maintenant sur  $\mathcal{B}$  deux métriques dépendant du temps  $g(t)$  et  $\bar{g}(t)$ . Dans l'application de ces développements à l'étude des diffusions latérales sur des interfaces biologiques, la métrique  $g(t)$  représente la vraie géométrie de l'interface biologique, et la métrique  $\bar{g}(t)$  décrit la géométrie moyenne de cette interface.

Soit  $O$  un point quelconque de  $\mathcal{B}$  et soit  $B_t$  le mouvement brownien dans la métrique  $g(t)$  qui part du point  $O$  à  $t = 0$ . La densité  $n$  de  $B_t$  définie par rapport à l'élément de volume  $d\text{Vol}_{g(t)}$  vérifie l'équation de transport suivante:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\delta}} \partial_t (\mu_{g(t)|\delta} n) = \chi \Delta_{g(t)} n, \quad (1.14)$$

avec, à chaque instant:

$$\int_{\mathcal{B}} n d\text{Vol}_{g(t)} = 1. \quad (1.15)$$

De façon analogue, on considère le mouvement brownien  $\bar{B}_t$  dans la métrique  $\bar{g}(t)$  qui part du point  $O$  à  $t = 0$ . On note  $\bar{n}$  la densité de  $\bar{B}_t$  par rapport à l'élément de volume  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ . La densité  $\bar{n}$  vérifie l'équation de transport suivante:

$$\frac{1}{\mu_{\bar{g}(t)|\delta}} \partial_t (\mu_{\bar{g}(t)|\delta} \bar{n}) = \chi \Delta_{\bar{g}(t)} \bar{n}, \quad (1.16)$$

avec, à tout temps:

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{n} d\text{Vol}_{\bar{g}(t)} = 1. \quad (1.17)$$

Pour comparer les mouvements browniens  $B_t$  et  $\bar{B}_t$ , nous allons comparer leurs densités respectives, définies par rapport à un élément de volume de référence. Cet élément de volume de référence peut-être tout à fait quelconque. Cependant, un choix naturel pour l'élément de volume de référence est l'élément de volume  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ , associé à la géométrie moyenne, accessible aux observations, de l'interface.

Soit  $N$  la densité du mouvement brownien  $B_t$  par rapport à  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ . La densité  $N$  est reliée à la densité  $n$  par l'équation suivante:

$$N = \mu_{g(t)|\bar{g}(t)} n, \quad (1.18)$$

où  $\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}$  est la densité de  $d\text{Vol}_{g(t)}$  par rapport à  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ :

$$d\text{Vol}_{g(t)} = \mu_{g(t)|\bar{g}(t)} d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}. \quad (1.19)$$

En remplaçant  $n$  par  $N/\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}$  dans l'équation (1.7), on obtient l'équation de transport pour la densité  $N$ :

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{\bar{g}(t)|\gamma} N) = \chi \Delta_{g(t)} \left( \frac{1}{\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}} N \right), \quad (1.20)$$

avec, à chaque instant:

$$\int_{\mathcal{B}} N d\text{Vol}_{\bar{g}(t)} = 1. \quad (1.21)$$

Dans le système de coordonnées  $C$ , l'équation (1.18) devient:

$$N(t, x) = \frac{\sqrt{\det g_{ij}(t, x)}}{\sqrt{\det \bar{g}_{ij}(t, x)}} n(t, x), \quad (1.22)$$



et l'équation de transport (1.20) pour  $N$  s'écrit:

$$\partial_t \left( \sqrt{\det \bar{g}_{kl}(t, x)} N(t, x) \right) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}(t, x)} g^{ij}(t, x) \partial_j \frac{\sqrt{\det \bar{g}_{kl}(t, x)}}{\sqrt{\det g_{kl}(t, x)}} N(t, x) \right), \quad (1.23)$$

avec, à chaque instant:

$$\int_{\mathbb{R}^d} N(t, x) \sqrt{\det \bar{g}_{ij}(t)} d^d x = 1. \quad (1.24)$$

On se pose alors la question suivante: comment la densité  $N$  diffère-t-elle, sur les grandes échelles, de la densité  $\bar{n}$ ? Etant donné qu'il est extrêmement difficile de répondre à cette question de façon complètement générale, on considère le cas particulier d'une surface à deux dimensions presque plane.

## 1.2 Mouvements browniens sur une surface presque plane

### 1.2.1 Présentation du modèle

On considère un modèle simple d'interface biologique: une surface 2- $D$  presque plane. Plus précisément, on suppose que la vraie géométrie de l'interface présente des fluctuations à petites échelles spatiales, de faible amplitude, autour du plan. On prend comme variété de base  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$ . On choisit comme géométrie moyenne la géométrie plane et on considère  $\bar{g}(t) = \eta$ , où  $\eta$  est la métrique euclidienne plate. On introduit un champ tensoriel  $h(t)$  sur  $\mathcal{B}$ , défini par:

$$g^{-1}(t) = \eta^{-1} + \varepsilon h(t), \quad (1.25)$$

où  $g^{-1}(t)$  est la métrique inverse de la vraie métrique  $g(t)$ , et  $\varepsilon$  est un paramètre très petit devant 1, qui rend compte du caractère presque plat de la vraie géométrie. Le système de coordonnées  $C$ , dont les coordonnées associées sont  $x = (x^1, x^2)$ , est choisi de telle sorte que les composantes de  $\eta$  dans  $C$  soient:  $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1)$ . Le champ tensoriel  $h(t)$  est représenté dans  $C$  par ses composantes  $h^{ij}(t, x)$ . La relation (1.25) s'écrit donc, dans  $C$ :

$$g^{ij}(t, x) = \eta^{ij} + \varepsilon h^{ij}(t, x). \quad (1.26)$$

Nous avons choisi de prendre les composantes  $h^{ij}(t, x)$  sous la forme d'une superposition de modes de Fourier:

$$h^{ij}(t, x) = \sum_{nm'} h_{nm'}^{ij} \cos(\omega_{n'} t - k_n \cdot x + \phi_{nm'}), \quad (1.27)$$

où les coefficients  $h_{mn}^{ij}$  sont quelconques, et  $k_n \cdot x = k_{n1}x^1 + k_{n2}x^2$ . On impose que tous les nombres d'ondes  $|k_n|$  soient supérieurs à un certain  $K^*$ . On définit les grandes échelles spatiales comme les échelles spatiales caractérisées par un vecteur d'onde  $k$  tel que:  $|k| < K^*$ . Les petites échelles sont celles qui ne sont pas grandes.

Comme  $\bar{g} = \eta$ , on a  $\sqrt{\det \bar{g}_{ij}} d^2x = \sqrt{\det \eta_{ij}} d^2x = d^2x$ . L'équation de transport pour la densité  $N$  s'écrit de la façon suivante, dans  $C$ :

$$\partial_t N(t, x) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}(t, x)} g^{ij}(t, x) \partial_j \frac{N(t, x)}{\sqrt{\det g_{kl}(t, x)}} \right), \quad (1.28)$$

avec, à chaque instant:

$$\int_{\mathbb{R}^2} N(t, x) d^2x = 1. \quad (1.29)$$

Nous avons cherché une solution de (1.28) sous la forme d'un développement formel en puissances de  $\varepsilon$ .

## 1.2.2 Résolution perturbative de l'équation de transport pour la densité $N$

On cherche une solution de (1.28) sous la forme d'une série formelle en puissances de l'amplitude de la perturbation  $\varepsilon$ :

$$N(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m N_m(t, x). \quad (1.30)$$

La diffusion commence à  $t = 0$  au point  $O$  de  $\mathcal{B}$ , de coordonnées  $(0, 0)$  dans  $C$ . On impose pour tout  $x$ :  $N_0(0, x) = \delta(x)$ , et, pour  $m > 0$ ,  $N_m(0, x) = 0$ .

En injectant les expressions (1.26) pour  $g^{ij}(t, x)$  et (1.30) pour  $N(t, x)$  dans l'équation (1.28), puis en développant l'équation ainsi obtenue en puissances de  $\varepsilon$ , on obtient une hiérarchie d'équations différentielles de la forme:

$$\partial_t N_m = \chi \Delta_\eta N_m + \chi S_m[h, N_r], m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_{m-1}, \quad (1.31)$$

où chaque terme source  $S_m$  est une fonctionnelle de la perturbation  $h$  et des contributions à  $N$  d'ordre inférieur à  $m$ . Les expressions des trois premiers termes sont:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= \partial_i \left( h^{ij} \partial_j N_0 + \frac{1}{2} N_0 \eta^{ij} \eta_{kl} \partial_j h^{kl} \right) \\ S_2 &= \partial_i \left( h^{ij} \partial_j N_1 + \frac{1}{2} (N_0 h^{ij} + N_1 \eta^{ij}) \eta_{kl} \partial_j h^{kl} - \frac{1}{4} N_0 \eta^{ij} \eta_{mk} \eta_{nl} \partial_j (h^{mn} h^{kl}) \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

La densité  $N_0$  vérifie donc l'équation de diffusion usuelle sur le plan:

$$\partial_t N_0 = \chi \Delta N_0, \quad (1.33)$$

où  $\Delta$  est le Laplacien sur le plan. Comme on a  $N_0(0, x) = \delta(x)$ , la densité  $N_0$  est donc égale à la fonction de Green de l'équation (1.33):

$$N_0(t, x) = \frac{1}{4\pi\chi t} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right). \quad (1.34)$$

Faisons maintenant une remarque concernant la normalisation des différents termes de (1.30). Le choix des conditions initiales  $N_0(0, x) = \delta(x)$  et  $N_m(0, x) = 0$  pour tout  $m > 0$  implique que l'on a, à  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} N_0(0, x) d^2 x &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}^2} N_m(0, x) d^2 x &= 0 \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Les termes source  $S_m$  intervenant dans les équations (1.31) sont des divergences, comme on peut le voir dans les expressions (1.32) des premiers termes. Par conséquent, les équations (1.31) assurent la conservation de la normalisation des densités  $N_m$ ,  $m \geq 0$  avec le temps. On a donc, à chaque instant:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} N_0(t, x) d^2 x &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}^2} N_m(t, x) d^2 x &= 0 \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Pour déterminer les expressions des densités  $N_1$  et  $N_2$ , il est plus pratique de passer dans l'espace de Fourier spatial. Soit  $f$  une fonction quelconque de  $x$ . On définit la transformée de Fourier de  $f$  par:

$$\hat{f}(t, k) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x) \exp(-ik \cdot x) d^2 x, \quad (1.37)$$

avec  $k \cdot x = k_1 x^1 + k_2 x^2$ . Après de longs calculs dont on peut retrouver les étapes dans [25], nous avons obtenu les expressions suivantes pour les fonctions  $\hat{N}_1$  et  $\hat{N}_2$ :

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(t, k) &= \hat{N}_0(t, k) \int_0^t \hat{S}_1(t', k) \exp(k^2 \chi t') dt' \\ \hat{N}_2(t, k) &= \hat{N}_0(t, k) \int_0^t \hat{S}_2(t', k) \exp(k^2 \chi t') dt', \end{aligned} \quad (1.38)$$

où  $\hat{N}_0(t, k) = \exp(-k^2 \chi t)$ , l'opérateur  $\hat{S}_1$  s'exprime en fonction de  $t, k, \eta, \hat{h}$  et  $\hat{N}_0$  et  $\hat{S}_2$  s'exprime en fonction de  $t, k, \eta, \hat{h}, \hat{N}_0$  et  $\hat{N}_1$  [25]. Nous avons ensuite utilisé l'expression (1.27) pour les composantes  $h^{ij}$  de la perturbation, et obtenu les expressions exactes de  $\hat{N}_1(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  et de  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$ , sous la forme de sommes sur les modes de Fourier de la perturbation. On peut retrouver ces expressions, qui sont très lourdes, dans [25]. Les rapports  $\hat{N}_1(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  et  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  représentent comment le mouvement brownien dans la vraie géométrie diffère, au premier ordre en  $\varepsilon$  et au deuxième ordre en  $\varepsilon$  respectivement, du mouvement brownien sur le plan. Nous allons voir comment se comportent ces quantités lorsque l'on observe la diffusion sur une échelle grande devant les échelles de fluctuation de la géométrie.

### 1.2.3 Effets des fluctuations de la géométrie sur les aspects grandes échelles de la diffusion

On caractérise l'échelle spatiale sur laquelle la diffusion est observée par le vecteur d'onde  $k$ . On prend  $k$  tel que:  $|k| = K^* O(\nu)$ , où  $\nu$  est un paramètre très petit devant 1. Ce choix assure que l'on a, pour toutes les échelles de variation  $k_n$  de la perturbation:  $|k_n| \gg |k|$ . Comment se comportent les termes correctifs  $\hat{N}_1(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  et  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  dans ce cas?

Le rapport  $\hat{N}_1(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  dépend du temps par l'intermédiaire de termes de la forme

$$I_{nn'}^\pm(k) \exp \left[ \pm i \omega_{n'} t - \left( k_n^2 \pm 2k \cdot k_n \right) \chi t \right]. \quad (1.39)$$

On peut montrer que les coefficients  $I_{nn'}^\pm(k)$  sont de l'ordre de  $O(\nu)$ , sauf dans le cas d'une perturbation  $h(t)$  proportionnelle à  $\eta$ , où l'on a  $I_{nn'}^\pm(k) \sim O(\nu^2)$ . Les exponentielles réelles  $\exp \left[ - \left( k_n^2 \pm 2k \cdot k_n \right) \chi t \right]$  tendent vers 0 avec un temps de relaxation  $\tau_n = 1/k_n^2 \chi$ . Ce temps de relaxation est très petit devant le temps caractéristique de diffusion  $1/\chi k^2$  associé à l'échelle observable  $k$ . On en déduit que les fluctuations à petites échelles de la géométrie ont, au premier ordre, un effet négligeable sur les aspects grandes échelles du mouvement brownien sur la surface presque plane.

Discutons maintenant du rapport  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$ . On trouve dans l'expression de ce rapport des termes de la forme [25]:

$$C_{nn'pp'}^\pm(k) \exp \left[ \pm i \left( \omega_{n'} + \omega_{p'} \right) t - \left( \left( K_{np}^+ \right)^2 \pm 2k \cdot K_{np}^+ \right) \chi t \right] \quad (1.40)$$

et

$$\tilde{C}_{nn'pp'}^\pm(k) \exp \left[ \pm i \left( \omega_{n'} - \omega_{p'} \right) t - \left( \left( K_{np}^- \right)^2 \pm 2k \cdot K_{np}^- \right) \chi t \right], \quad (1.41)$$

où les vecteurs  $K_{np}^\pm$  sont définis par

$$K_{np}^\pm = k_n \pm k_p. \quad (1.42)$$

Les coefficients  $C_{nn'p}^{\pm}(k)$  et  $\tilde{C}_{nn'pp'}^{\pm}$  varient comme  $O(1/\nu)$ . On peut montrer que si, à  $k$  fixé, il existe des modes de Fourier  $k_n$  et  $k_p$  de la perturbation tels que leur différence  $K_{np}^-$ , ou leurs somme  $K_{np}^+$ , soit de l'ordre de l'échelle d'observation  $k$ , alors une des exponentielles réelles parmi  $\exp\left[-\left((K_{np}^+)^2 \pm 2k.K_{np}^+\right)\chi t\right]$  et  $\exp\left[-\left((K_{np}^-)^2 \pm 2k.K_{np}^-\right)\chi t\right]$  diverge avec le temps, avec un temps caractéristique  $\tau = 1/k^2\chi$ . Le terme correctif d'ordre 2,  $\varepsilon^2\hat{N}_2/\hat{N}_0$ , devient alors de l'ordre de l'unité après un temps caractéristique  $\tau(\varepsilon, \nu, k) \sim -\frac{1}{k^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\nu^{1/2}}\right)$ . Le mouvement brownien sur la surface presque plane semble donc différer complètement du mouvement brownien sur le plan au bout du temps caractéristique  $\tau(\varepsilon, \nu, k)$ . Notons que dans le cas d'une perturbation qui présente un spectre de variation continu, cette divergence a lieu sur toutes les échelles d'observation  $k$ . Les fluctuations à petites échelles de la géométrie ont donc, d'après cette étude perturbative, un effet cumulatif, non négligeable, sur les aspects grandes échelles du mouvement brownien. Cet effet cumulatif est un effet de résonance induit par le caractère non-linéaire de l'équation de transport qui relie la densité du mouvement brownien à la géométrie de l'interface. Les résultats perturbatifs présentés ici semblent donc indiquer que l'on ne peut pas utiliser des modèles de diffusion standards sur le plan pour décrire un mouvement brownien sur une surface presque plane.

On peut remarquer que notre étude des effets des irrégularités à petites échelles de la géométrie sur les aspects grandes échelles de mouvements browniens, s'inscrit dans la continuité des nombreux travaux concernant la question générale de l'homogénéisation (voir par exemple [98]).

Je conclurai cette section en mentionnant que, à des échelles comparables aux échelles de variation des irrégularités géométriques, l'influence de ces irrégularités sur le mouvement Brownien est un effet du premier ordre en  $\varepsilon$ , croissant exponentiellement avec le temps. Une discussion détaillée de ce point peut être trouvée dans [25].

## 1.2.4 Moyenne spatiale et moyenne statistique

Nous avons initialement utilisé des moyennes sur des familles de métriques pour dégager les aspects grandes échelles d'une diffusion sur une surface dont la géométrie varie à plusieurs échelles. Plus précisément, nous avons introduit sur la variété de base  $\mathcal{B}$  une famille  $\Sigma$  de métriques pour décrire la géométrie multi-échelle de l'interface. Chaque métrique de la famille variait généralement sur des grandes et des petites échelles. Nous avons associé à  $\Sigma$  une métrique moyenne, définie comme la moyenne des métriques sur  $\Sigma$ . La famille  $\Sigma$  était construite de telle sorte que toutes les métrique de la famille coïncident entre elles et avec la métrique moyenne sur les grandes échelles mais diffèrent sur les petites échelles.

Nous avons défini dans chacune des métriques de  $\Sigma$  un mouvement brownien. Afin de pouvoir comparer les mouvements browniens dans les différentes métriques de  $\Sigma$ , nous avons décrit chacun de ces browniens par une densité définie par rapport à un élément de volume de référence. Nous avons ensuite introduit une densité moyenne associée à  $\Sigma$ , définie comme la moyenne sur  $\Sigma$  des différentes densités définies par rapport au même élément de volume de référence. Cette densité moyenne caractérisait un mouvement brownien moyen associé à  $\Sigma$ . Nous avons comparé, dans le cas de la surface presque plane le mouvement brownien dans la métrique moyenne au mouvement brownien moyen. Cette étude nous avait conduits aux mêmes conclusions que celles présentées ci-dessus concernant l'influence à grandes échelles des irrégularités géométriques sur le mouvement Brownien. Bien sur, les conclusions à petites échelles obtenues dans [25] ne peuvent pas être retrouvées par un raisonnement fondé sur l'utilisation d'une famille de métriques.

Nous pouvons en conclure qu'à condition d'être correctement utilisés, les moyennes sur des familles de métriques peuvent être des outils très utiles pour réaliser des moyennes sur les petites échelles spatiales.

## Chapitre 2

# Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP)

### 2.1 Présentation du ROUP

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP) décrit la diffusion d'une particule ponctuelle relativiste dans un fluide en l'absence de gravitation [46]. Ce fluide est supposé à l'équilibre thermodynamique à la température  $\Theta$  et sa 4-vitesse est notée  $W$ . Puisque le fluide est à l'équilibre thermodynamique et que l'espace-temps est plat, il existe un référentiel inertiel dans lequel le fluide est globalement au repos. Ce référentiel, que l'on notera  $\mathcal{R}_W$ , constitue un référentiel d'étude naturel pour le mouvement de la particule qui diffuse ([46]).

Soit  $C_W$  un système de coordonnées inertiel appartenant à  $\mathcal{R}_W$ , et soient  $X = (T, \mathbf{X})$ , où  $\mathbf{X}$  représente  $(X^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les coordonnées associées à  $C$ . Les composantes de l'impulsion de la particule dans  $C_W$  sont:  $P = (\gamma(\mathbf{P}), \mathbf{P})$ , où  $\mathbf{P}$  représente  $(P_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , et  $\gamma(\mathbf{P})$  est l'énergie de la particule, c'est-à-dire le facteur de Lorentz, exprimé ici comme une fonction de la 3-impulsion  $\mathbf{P}$ :

$$\gamma(\mathbf{P}) = \sqrt{1 + \mathbf{P}^2}, \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{P}^2 = -P_i P^i$ . On considère dans  $C_W$  le système d'équations différentielles stochastiques suivant [46]:

$$\begin{aligned} dX_T^i &= \eta^{ij} \frac{P_{j,T}}{\gamma(\mathbf{P}_T)} dT \\ dP_{i,T} &= -\alpha \frac{P_{j,T}}{\gamma(\mathbf{P}_T)} dT + \sqrt{2D} dB_{i,T}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec  $\alpha$  et  $D$  deux constantes réelles positives, et  $(B_{i,t})$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois browniens indépendants. La première équation de (2.2) est la définition relativiste de

l'impulsion de la particule en fonction de la vitesse, et la deuxième est l'équation du mouvement. L'action du fluide environnant sur la particule qui diffuse se décompose en deux contributions distinctes: une contribution déterministe et une contribution stochastique. La contribution déterministe prend la forme d'une 3-force de frottement  $\mathbf{f}_d$ , dont l'expression est donnée par [46]:

$$\mathbf{f}_d = -\alpha \frac{\mathbf{P}}{\gamma(\mathbf{P})}, \quad (2.3)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de frottement, supposé constant. Cette contribution déterministe représente l'action moyenne du fluide sur la particule qui diffuse. La contribution stochastique correspondrait à une force  $\mathbf{f}_s$  qui s'écrirait de la façon suivante:

$$\mathbf{f}_s = \sqrt{2D} \frac{d\mathbf{B}_T}{dT}, \quad (2.4)$$

avec  $D$  un coefficient de bruit, supposé constant, et  $d\mathbf{B}_T/dT$  représentant  $(dB_{i,T}/dT)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , où chaque  $dB_{i,T}/dT$  est ce qui est souvent appelé un bruit blanc gaussien. Cette écriture est bien sûr abusive, puisque la dérivée d'un brownien n'est pas définie. Une écriture correcte serait plutôt:

$$d\mathbf{f}_s = \sqrt{2D} d\mathbf{B}_T, \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{B}_T$  représentant les trois browniens indépendants  $(B_{i,T})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Le système d'équations différentielles stochastiques (2.2) définit le ROUP dans le système de coordonnées  $C_W$ .

Considérons le fibré couche de masse, défini par la relation  $\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 1$ , et noté  $\mathcal{F}_M$ . La carte  $C_W$  induit sur  $\mathcal{F}_M$  une carte  $(C_W)_{\mathcal{F}_M}$ , de coordonnées associées  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ . Remarquons que, comme l'espace-temps est plat et que le système de coordonnées  $C_W$  est inertiel, le domaine de  $(C_W)_{\mathcal{F}_M}$  coïncide avec le fibré couche de masse, et  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$  décrit donc  $\mathbb{R}^7$ . Il est pratique, en physique statistique relativiste, de définir l'espace des phases de la particule dans  $C_W$  comme l'espace des  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ . La répartition de la particule dans les tranches  $T = \text{cte}$  de cet espace est décrite par une fonction de distribution  $\Pi_{C_W}$ ; ainsi, la probabilité de trouver à l'instant  $T$  la particule en  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{P}$  à  $d^3X$  et  $d^3P$  près vaut  $\Pi_{C_W}(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) d^3X d^3P$ .

L'équation de transport correspondant au système (2.2) s'écrit alors [46]:

$$\frac{\partial}{\partial T} \Pi_{C_W} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi_{C_W} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left( \alpha \frac{\mathbf{P}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi_{C_W} \right) = D \Delta_{\mathbf{P}} \Pi_{C_W}. \quad (2.6)$$

Puisque le fluide est à l'équilibre thermodynamique global à la température  $\Theta$ , et que l'on se trouve dans le référentiel propre de ce fluide, on s'attend à ce que la distribution de Jüttner  $\Pi_J$  à la température  $\Theta$  [80, 40],

$$\Pi_J(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\beta}{K_2(\beta)} \exp(-\beta \gamma(\mathbf{P})), \quad (2.7)$$



où  $\beta = 1/\Theta$ , qui est l'équivalent relativiste de la distribution de Maxwell à la température  $\Theta$ , soit une solution stationnaire de l'équation (2.6). Les coefficients  $\alpha$  et  $D$  caractérisant le processus sont alors reliés à  $\Theta$  par,

$$\frac{D}{m\alpha} = k_B\Theta. \quad (2.8)$$

Notons que pour écrire la relation (2.8), nous avons réintroduit momentanément la constante de Boltzmann  $k_B$  ainsi que la masse  $m$  de la particule. Cela permet de faire apparaître clairement les deux quantités homogènes à une énergie: la quantité  $k_B\Theta$ , associée à l'état d'équilibre thermodynamique global du fluide à la température  $\Theta$ , et la quantité  $D/m\alpha$ , qui fait intervenir les caractéristiques microscopiques de la diffusion. La relation (2.8) constitue ainsi un théorème de fluctuation-dissipation relativiste.

Le système d'équations différentielles stochastiques (2.2), ou, de manière équivalente, l'équation de transport (2.6) associée à ce système d'équations stochastiques, définissent le ROUP dans  $\mathcal{R}_W$ .

## 2.2 Le ROUP dans un référentiel inertiel quelconque

Considérons maintenant un référentiel inertiel quelconque  $\mathcal{R}$ . Soit  $C$  un système de coordonnées inertiel appartenant à  $\mathcal{R}$ , et soient  $x = (t, \mathbf{x})$  les coordonnées associées à  $C$ . Comment peut-on décrire le ROUP dans  $\mathcal{R}$ ?

Une démarche naturelle consiste à effectuer une transformation de Lorentz sur système d'équations (2.2) introduit dans  $\mathcal{R}_W$ . Cette approche est toutefois difficile à mettre en oeuvre, car effectuer des changements de coordonnées sur des équations différentielles stochastiques s'avère être une opération délicate. Les différentes étapes nécessaires pour transcrire un système d'équations différentielles stochastiques d'un système de coordonnées à un autre sont présentées en détail dans la section 4.1. Nous présentons ici uniquement le résultat final: le nouveau système d'équations différentielles stochastiques obtenu dans  $C$  à partir du système défini dans  $C_W$ , est de la forme:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= \eta^{ij} \frac{p_{j,t}}{\gamma(\mathbf{p}_t)} dt \\ dp_{i,t} &= f_i(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dt + \sigma_{ij}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dB_{j,t}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $f_i$  et  $\sigma_{ij}$  s'expriment en fonction de la force de frottement et du bruit introduits dans  $C_W$ . Les fonctions  $f_i$  sont les composantes de la 3-force déterministe exercée par le fluide sur la particule dans  $C$ . Les fonctions  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du coefficient de bruit dans  $C'$ . Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  inertiel quelconque, ce coefficient est en général anisotrope. Le système (2.9), de même que le système (2.2),

décrit une diffusion dans l'espace des impulsions; il définit ainsi le ROUP dans le système de coordonnées  $C$ . En effet, un processus stochastique relativiste est nécessairement une diffusion dans l'espace des impulsions [52, 46].

Soit  $C_{\mathcal{F}_M}$  le système de coordonnées induit par  $C$  sur le fibré couche de masse  $\mathcal{F}_M$ ; les coordonnées associées à  $C_{\mathcal{F}_M}$  sont  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Comme l'espace-temps est plat et que le système de coordonnées  $C$  est inertiel, les coordonnées  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  décrivent  $\mathbb{R}^7$ . L'espace des phases de la particule dans  $C$  est défini comme l'espace des  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . La répartition de la particule dans les tranches  $t = \text{cte}$  de cet espace est décrite par une fonction de distribution  $\Pi_C$ ; ainsi, la probabilité de trouver à l'instant  $t$  la particule en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$  à  $d^3x$  et  $d^3p$  près vaut  $\Pi_C(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})d^3xd^3p$ . L'équation de transport pour  $\Pi_C$  correspondant au système (2.9) est alors de la forme [8, 34, 27]:

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi_C \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} (\psi_i \Pi_C) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( A_{ij} \frac{\partial \Pi_C}{\partial p_j} \right), \quad (2.10)$$

où les expressions exactes  $\psi_i$  et de  $A_{ij}$  sont données par (4.35) et (4.36) respectivement.

Comparons maintenant les fonctions  $\Pi_{C_W}$  et  $\Pi_C$ . La probabilité de trouver à l'instant  $T$  la particule en  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{P}$  à  $d^3X$  et  $d^3P$  près est donnée par  $\Pi_{C_W}(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})d^3Xd^3P$ . De façon analogue, la probabilité de trouver à l'instant  $t$  la particule en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$  à  $d^3x$  et  $d^3p$  près est donnée par  $\Pi_C(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})d^3xd^3p$ . Les coordonnées d'espace-temps  $(t, \mathbf{x})$  sont reliées aux coordonnées  $(T, \mathbf{X})$  par la transformation de Lorentz qui permet de passer de  $C_W$  à  $C$ . L'instant  $t$  dans  $C$  dépend donc de l'instant  $T$  dans  $C_W$ , mais aussi de la partie spatiale  $\mathbf{X}$  des coordonnées d'un point de l'hypersurface  $T = \text{constante}$ . De même,  $T$  dépend à la fois de  $t$  et de  $\mathbf{x}$ . Il s'en suit que les hypersurfaces  $T = \text{constante}$  ne coïncident pas avec les hypersurfaces  $t = \text{constante}$ . Ainsi, il n'est pas trivial, en physique relativiste, que les fonctions de distribution d'une particule dans deux systèmes de coordonnées inertiels différents soient égales.

Soit  $\tilde{\Pi}_{C_W} = \Pi_{C_W} \circ C_W$  et  $\tilde{\Pi}_C = \Pi_C \circ C$ . On a, par définition, pour tout point  $M$  du fibré couche de masse:

$$\tilde{\Pi}_{C_W}(M) = \Pi_{C_W}(T(M), \mathbf{X}(M), \mathbf{P}(M)), \quad (2.11)$$

et

$$\tilde{\Pi}_C(M) = \Pi_C(t(M), \mathbf{x}(M), \mathbf{p}(M)). \quad (2.12)$$

On peut montrer, pour toute carte  $C$ , que [40, 48]):

$$\tilde{\Pi}_{C_W} = \tilde{\Pi}_C. \quad (2.13)$$

Ainsi, la fonction  $\tilde{\Pi}_C$  est indépendante du système de coordonnées  $C$ . Les fonctions de distribution  $\Pi_{C_W}$  et  $\Pi_C$  sont donc égales. A partir de maintenant, nous

adopterons la notation  $\Pi$  pour la fonction  $\tilde{\Pi}_C$ . La fonction  $\Pi_C$  des coordonnées  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  associées à un système de coordonnées  $C_{\mathcal{F}_M}$  quelconque de  $\mathcal{F}_M$  est la représentation de  $\Pi$  dans ce système de coordonnées. Afin d'être en accord avec les notations habituellement utilisées en physique, nous allons appeler cette fonction, par abus de langage, non plus  $\Pi_C$  mais également  $\Pi$ . Ainsi,  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  désigne la valeur de la représentation de  $\Pi$  dans  $C_{\mathcal{F}_M}$  en  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Notons que, dans les termes usuels de physique, l'égalité (2.13) s'interprète comme le fait que  $\Pi$  est un scalaire.

Les équations différentielles stochastiques (2.9), ou, de façon équivalente, l'équation de transport (2.10) qui en découle, définissent pleinement le ROUP dans  $C$ . Le système (2.9) est obtenu à partir du système (2.2) dans  $C_W$ . Le ROUP dans un référentiel inertiel quelconque est donc pleinement défini par le système d'équations différentielles stochastiques (2.2) (ou par l'équation de transport (2.6) correspondant à (2.2)), introduit dans le référentiel propre du fluide.

## 2.3 Formulation manifestement covariante du ROUP

En pratique, déterminer les équations différentielles stochastiques, puis l'équation de transport associée, pour le ROUP dans un référentiel inertiel autre que  $\mathcal{R}_W$  en suivant le cheminement évoqué ci-dessus est long et compliqué. Il existe une façon plus simple de décrire le ROUP dans un référentiel inertiel quelconque. Cette méthode consiste à obtenir l'équation de transport dans le référentiel souhaité pour la fonction de distribution  $\Pi$  de la particule sans passer par l'étape d'écriture des équations différentielles stochastiques dans ce référentiel. On est amené pour cela à développer une formulation manifestement covariante du ROUP [7]. La fonction de distribution  $\Pi$  est définie sur le fibré couche de masse  $\mathcal{F}_M$ . Or, comme nous l'avons vu précédemment, seulement trois degrés de liberté associés à l'impulsion, par exemple les trois composantes spatiales  $(p_i), i = 1, 2, 3$  de l'impulsion dans  $C$ , correspondent, sur  $\mathcal{F}_M$ , aux quatre degrés de liberté d'espace-temps, par exemple les quatre coordonnées  $(x^\mu) = (t, \mathbf{x}), \mu = 0, 1, 2, 3$ , associées à  $C$ . Pour traiter la 4-impulsion d'une particule de façon manifestement covariante, il est donc nécessaire de s'extraire du fibré couche de masse. Dans l'espace des impulsions hors de la couche de masse, les quatre composantes  $p = (p_0, \mathbf{p})$  de la 4-impulsion dans un système de coordonnées  $C$  sont indépendantes. On se place donc dans le fibré cotangent  $T^*S$  pour construire une formulation manifestement covariante du ROUP. On considère un domaine  $\mathcal{P}$  de  $T^*S$ . Ce domaine  $\mathcal{P}$  a huit dimensions et contient nécessairement la couche de masse. La définition exacte de  $\mathcal{P}$  sera précisée dans la suite. Le domaine  $\mathcal{P}$  est appelé espace des phases étendu. On introduit alors une nouvelle fonction de distribution, notée  $f$ , définie sur  $\mathcal{P}$ . La fonction de distribution  $f$  n'est bien sûr pas physique, mais on impose que sa res-

triction sur la couche de masse soit égale à la fonction de distribution physique  $\Pi$  [76, 7]. Considérons le système de coordonnées  $C_{T^*S}$  sur  $T^*S$ , avec les coordonnées associées  $(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$ . Par abus de langage, on notera la représentation de  $f$  dans  $C_{T^*S}$   $f$  également. On a la relation suivante entre  $f$  et  $\Pi$  dans  $C_{T^*S}$ :

$$\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{p \in \mathcal{P}} f(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0. \quad (2.14)$$

La distribution de Dirac intervenant dans (2.14) permet la restriction sur la couche de masse. La relation (2.14) ne fait pas correspondre à une densité  $\Pi$  fixée une unique densité  $f$ . Il existe une infinité de fonctions  $f$  dont la restriction sur le fibré couche de masse peut être  $\Pi$ . Etant donné que la densité physique  $\Pi$  est un scalaire et que l'opération de restriction sur la couche de masse est invariante par changement de coordonnées, il est naturel de considérer  $f$  scalaire [40, 76, 48]. Dans ce cas, l'équation de transport vérifiée par la densité  $f$  sera obtenue en écrivant que  $f$  appartient au noyau d'un opérateur linéaire invariant de Lorentz. En transposant en dehors de la couche de masse l'équation de transport (2.6) définissant le ROUP dans le système de coordonnées  $C_W$ , on obtient l'équation suivante [7]:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{P_0} \mathcal{L}(f) \delta(P_0 - \gamma(\mathbf{P})) dP_0 = 0, \quad (2.15)$$

avec

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (F_{d,\mu} f) + K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot W} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f \right), \quad (2.16)$$

où l'on rappelle que  $W$  représente la 4-vitesse du fluide dans laquelle a lieu la diffusion. La 4-force  $F_d$  est l'écriture manifestement covariante de la force de friction déterministe exercée par le fluide sur la particule:

$$F_{d,\mu} = -\lambda_\mu^\nu p_\nu p^2 + \lambda^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (2.17)$$

$$\lambda_\mu^\nu = \frac{\alpha}{(p \cdot W)^2} \Delta_\mu^\nu, \quad (2.18)$$

On note  $\Delta$  le projecteur sur l'orthogonal à la 4-vitesse  $W$ :

$$\Delta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - W_\mu W_\nu, \quad (2.19)$$

et finalement, le tenseur  $K$  est défini par:

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = W^\mu W^\beta \Delta^{\rho\nu} - W^\mu W^\nu \Delta^{\rho\beta} + W^\rho W^\nu \Delta^{\mu\beta} - W^\rho W^\beta \Delta^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

On choisit donc finalement comme équation de transport manifestement covariante:

$$\mathcal{L}(f) = 0, \quad (2.21)$$

Abordons maintenant le choix du domaine  $\mathcal{P}$ . On peut voir dans les expressions (2.16) et (4.55) que certains coefficients de l'équation de transport manifestement covariante ne sont pas définis si le produit scalaire  $p.W$  s'annule. Il convient de choisir  $\mathcal{P}$  comme un domaine de  $T^*S$  où tous les coefficients de l'équation de transport manifestement covariante sont définis; on choisit donc  $\mathcal{P}$  comme étant le domaine de  $T^*S$  tel que  $p.W > 0$ ; notons que  $\mathcal{P}$  contient bien la couche de masse.

Pour obtenir l'équation de transport pour la densité physique  $\Pi$  dans un système de coordonnées inertiel quelconque  $C$ , on écrit l'équation de transport manifestement covariante dans  $C$ , puis on restreint l'équation ainsi obtenue sur la couche de masse, en utilisant des relations du type de (2.14). Ainsi, l'équation de transport pour  $\Pi$  dans  $C$  s'écrit, en utilisant la formulation manifestement covariante, de la façon suivante:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_0} \mathcal{L}(f) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0 = 0. \quad (2.22)$$

Par construction, la restriction de (2.21) au fibré couche de masse est l'équation de transport (2.6) pour la densité physique  $\Pi$  dans le référentiel propre du fluide. Or nous avons vu dans la section 2.2 que l'équation (2.6) suffisait pleinement à définir le ROUP. L'équation de transport manifestement covariante (2.21) constitue donc une définition possible du ROUP. Nous allons voir dans la prochaine section que cette équation peut être utilisée pour étendre le ROUP en relativité générale.



## Chapitre 3

# Un modèle de diffusion dans un univers homogène et isotrope

### 3.1 Construction d'une classe d'extensions du ROUP en espace-temps courbe

Nous avons vu dans la section précédente que le ROUP en relativité restreinte pouvait être défini par un système d'équations différentielles stochastiques dans le référentiel propre du fluide dans lequel a lieu la diffusion, ou, de façon équivalente, par une équation de transport manifestement covariante. Une méthode possible pour étendre le ROUP en relativité générale est d'écrire une généralisation en espace-temps courbe de l'équation de transport manifestement covariante (2.21) qui définissait le ROUP en espace-temps plat. C'est cette approche qui a été adoptée en 2003 dans [42] pour introduire une extension minimale du ROUP en espace-temps courbe, et que nous allons présenter ici, mais dans une version plus générale. L'espace-temps  $\mathcal{S}$  est maintenant muni d'une métrique lorentzienne arbitraire  $g$ , qui tient compte de la présence éventuelle d'un champ de gravitation. On considère l'espace des phases étendu  $\mathcal{P}$  dans le fibré cotangent  $T^*\mathcal{S}$ . De même qu'en relativité restreinte,  $\mathcal{P}$  contient la couche de masse et est défini comme le domaine de  $T^*\mathcal{S}$  tel que  $p \cdot W > 0$ . Rappelons que  $W$  représente la 4-vitesse du fluide dans lequel la particule diffuse. Puisque la courbure de l'espace-temps est généralement non nulle, la 4-vitesse  $W$  dépend du point d'espace-temps considéré. On introduit sur  $\mathcal{P}$  une fonction de distribution  $f$  telle que la restriction de  $f$  sur la couche de masse soit la fonction de distribution physique  $\Pi$  [76, 42]. Soit le système de coordonnées  $C_{T^*\mathcal{S}}$  sur  $T^*\mathcal{S}$ , les coordonnées associées à  $C_{T^*\mathcal{S}}$  sont  $(x, p) = (t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$ . Les fonctions  $f$  et  $\Pi$  sont reliées par l'équation suivante dans

$C_{T^*S}$ :

$$\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{p \in \mathcal{P}} f(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) dp_0. \quad (3.1)$$

Comme en espace-temps plat, la distribution de Dirac intervenant dans (3.1) assure la restriction sur la couche de masse. Cependant, comme on se trouve maintenant en espace-temps courbe, la composante  $p_0$  est égale, sur la couche de masse, à une fonction non plus seulement de  $\mathbf{p}$ , mais aussi des coordonnées d'espace-temps  $(t, \mathbf{x})$ . La relation (3.1) n'associe pas à une fonction  $\Pi$  donnée une unique fonction  $f$ . On peut montrer que la fonction de distribution physique  $\Pi$  définie sur le fibré couche de masse est indépendante du système de coordonnées considéré, non seulement en relativité restreinte, mais aussi en relativité générale ([76, 42]). Il est donc naturel de choisir une fonction  $f$  sur l'espace des phases étendu qui soit elle aussi indépendante du système de coordonnées considéré. Notons toutefois que cette restriction n'impose pas  $f$  de manière unique.

Voyons maintenant comment on peut généraliser l'expression (2.16) de l'opérateur  $\mathcal{L}$  en espace-temps courbe, de façon à ce que cet opérateur soit invariant par un changement de coordonnées arbitraire, et pas seulement invariant par transformation de Lorentz. Les tenseurs  $F_d$ ,  $\lambda$  et  $K$  conservent leurs expressions introduites en espace-temps plat:

$$F_{d,\mu} = -\lambda_\mu^\nu p_\nu p^2 + \lambda^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (3.2)$$

$$\lambda_\mu^\nu = \frac{\alpha}{(p \cdot W)^2} \Delta_\mu^\nu \quad (3.3)$$

et

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = W^\mu W^\beta \Delta^{\rho\nu} - W^\mu W^\nu \Delta^{\rho\beta} + W^\rho W^\nu \Delta^{\mu\beta} - W^\rho W^\beta \Delta^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Le projecteur  $\Delta$  sur l'orthogonal à la 4-vitesse  $W$ , quant à lui, s'écrit maintenant:

$$\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - W_\mu W_\nu. \quad (3.5)$$

Discutons maintenant des dérivées partielles intervenant dans l'expression (2.16) de  $\mathcal{L}$ . Nous rappelons ici que  $C$  est un système de coordonnées sur  $S$ , avec pour coordonnées associées  $x = (x^\mu)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , et que les composantes de la 4-impulsion dans  $C$  sont notées  $(p_\mu)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . L'opération de dérivation d'un scalaire ou d'un tenseur de rang quelconque par rapport à l'une des composantes de la 4-impulsion est une opération qui s'effectue dans l'espace des impulsions en un point d'espace-temps donné. Or, en espace-temps courbe comme en espace-temps plat, l'espace des impulsions en un point quelconque de l'espace-temps est une variété à quatre dimensions plate. L'opération de dérivation d'un scalaire ou d'un tenseur de type quelconque par rapport à l'une des composantes de la 4-impulsion est donc une opération parfaitement covariante en espace-temps courbe



aussi bien qu'en espace-temps plat. On peut donc conserver l'opérateur  $\partial/\partial p_\mu$  intervenant dans l'expression de  $\mathcal{L}$ . Qu'en est-il de l'opération de dérivation d'un scalaire ou d'un tenseur de rang quelconque par rapport à l'une des coordonnées  $x^\mu$  d'espace-temps? Lorsque l'on dérive une quantité par rapport à l'une des coordonnées d'espace-temps, on effectue un déplacement infinitésimal sur l'espace-temps, du point  $M$ , de coordonnées  $x$  dans  $C$ , au point, noté  $M + dM$ , de coordonnées  $x + dx$  dans  $C$ . Lors de ce déplacement, les composantes de l'impulsion par rapport à la base induite par  $C$  sur le cotangent sont maintenues constantes. En espace-temps plat, la base induite par  $C$  en  $M$  est la même que la base induite par  $C$  en  $M + dM$ . La 4-impulsion est donc maintenue constante lorsque l'on dérive un scalaire ou un tenseur par rapport à une des coordonnées ( $x^\mu$ ), en espace-temps plat. Par-contre, en espace-temps courbe, la base du cotangent induite par  $C$  en  $M$  est généralement différente de la base du cotangent induite par  $C$  en  $M + dM$ . Ainsi, en espace-temps courbe, même si les composantes dans  $C$  de la 4-impulsion sont maintenues constantes lors de l'opération de dérivation d'un scalaire ou d'un tenseur par rapport à une coordonnée d'espace-temps, la 4-impulsion, elle, n'est pas maintenue constante. Or maintenir la 4-impulsion constante de façon covariante, ne signifie pas maintenir les composantes de la 4-impulsion constantes, mais maintenir la 4-impulsion constante, c'est-à-dire transporter parallèlement la 4-impulsion de  $M$  à  $M + dM$ . On est donc amené à introduire un nouvel opérateur, appelé opérateur de dérivation à  $p$  constant au sens covariant, qui assure que la 4-impulsion est transportée parallèlement de  $M$  à  $M + dM$ , pour remplacer l'opérateur  $\partial/\partial x^\mu$  en espace-temps courbe. L'expression de cet opérateur est donnée par [76, 42]:

$$\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\nu}, \quad (3.6)$$

où  $\nabla_\mu$  est la dérivée covariante usuelle. On a donc:

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{D}_\mu (g^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (F_{a,\mu} f) + K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot W} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f \right). \quad (3.7)$$

Apporter les modifications présentées ci-dessus à l'équation de transport est suffisant pour obtenir une équation de transport manifestement covariante définissant une extension minimale du ROUP en espace-temps courbe. On peut toutefois aller un peu plus loin et écrire une équation de transport manifestement covariante en espace-temps courbe plus générale. Le ROUP en espace-temps plat était caractérisé par un coefficient de frottement  $\alpha$  et un coefficient de bruit  $D$ , ces deux coefficients étant pris constants. En espace-temps courbe, l'état thermodynamique du fluide environnant la particule diffusante dépend généralement du point d'espace-temps considéré. Il est donc raisonnable de permettre aux deux coefficients  $\alpha$  et  $D$  de dépendre également de ce point. Mais il n'y a physiquement

aucune raison pour laquelle ces deux coefficients, en espace-temps plat comme en espace-temps courbe, ne dépendraient pas également de l'impulsion de la particule diffusante. On remplacera donc les coefficients  $\alpha$  et  $D$  constants intervenant dans (3.3) et (3.7) par des fonctions arbitraires  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{D}$  définies sur  $\mathcal{P}$ , telles que leur restriction sur la couche de masse soit respectivement les coefficients  $\alpha$  et  $D$  caractérisant le processus. On a, dans la carte  $C_{T^*S}$ :

$$\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\alpha}(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) dp_0. \quad (3.8)$$

De façon analogue:

$$D(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{D}(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) dp_0. \quad (3.9)$$

On réécrit alors le tenseur  $\lambda$  de la façon suivante:

$$\lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\tilde{\alpha}(x, p)}{(p \cdot W)^2} \Delta_{\mu}^{\nu}. \quad (3.10)$$

On obtient finalement l'équation de transport manifestement covariante suivante:

$$\mathcal{L}(f) = 0, \quad (3.11)$$

avec

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{D}_{\mu} (g^{\mu\nu} p_{\nu} f) + \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} (F_{d, \mu} f) + K^{\mu}_{\rho} \frac{\partial}{\partial p_{\rho}} \left( \tilde{D}(x, p) \frac{p_{\mu} p_{\beta}}{p \cdot W} \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} f \right), \quad (3.12)$$

où l'on rappelle que les expressions retenues pour  $F_d$ ,  $\lambda$ ,  $K$  et  $\Delta$  sont données par (3.2), (3.10), (3.4) et (3.5) respectivement. Cette équation définit toute une classe d'extensions du ROUP en relativité générale, chaque processus de la classe étant caractérisé par un couple de fonctions  $(\alpha, D)$ . Notons que l'équation obtenue lorsque l'on écrit l'équation (3.11) en espace-temps plat, ne se ramène pas à l'équation de transport (2.21) du ROUP en relativité restreinte. En effet, la nouvelle équation ainsi obtenue en espace-temps plat décrit non plus un seul processus caractérisé par deux constantes  $\alpha$  et  $D$ , mais toute une classe de processus stochastiques en relativité restreinte, chacun caractérisé par un couple de fonctions  $(\alpha, D)$  dépendant de la position d'espace-temps et de l'impulsion de la particule diffusante, fonctions parmi lesquelles on peut bien sûr trouver le cas particulier  $\alpha = \text{constante}$  et  $D = \text{constante}$ .

Pour obtenir l'équation de transport pour la fonction de distribution physique  $\Pi$  dans un système de coordonnées  $C$  quelconque, on procède de la même façon

qu'en espace-temps plat: on transcrit l'équation de transport manifestement covariante dans le système de coordonnées  $C$ , puis on restreint l'équation ainsi obtenue sur la couche de masse. L'équation de transport pour  $\Pi$  dans un système quelconque s'écrit donc, de façon manifestement covariante:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_0} \mathcal{L}(f) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) dp_0 = 0. \quad (3.13)$$

Une première application simple de cette généralisation du ROUP en espace-temps courbe est la construction d'un modèle-jouet de diffusion dans un univers homogène et isotrope.

### 3.2 Relations de fluctuation-dissipation dans un univers homogène et isotrope

On se propose d'utiliser la classe d'extensions du ROUP en espace-temps courbe introduite dans la section précédente pour étudier la diffusion d'une particule relativiste dans un espace-temps cosmologique simple. L'espace-temps cosmologique considéré est l'espace-temps de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) spatialement plat [113, 84], qui est un modèle d'univers homogène et isotrope. La matière présente dans cet espace-temps est décrite comme un fluide parfait, appelé fluide cosmologique. Il existe un système de coordonnées particulièrement utilisé sur cet espace-temps: il s'agit du référentiel comobile, auquel sont associées les coordonnées comobiles  $(t, \mathbf{x})$ . La coordonnée temporelle  $t$  est usuellement appelée temps cosmologique. Le système de coordonnées comobiles est un système de coordonnées défini globalement sur la variété d'espace-temps; il suit l'évolution de l'univers. Les composantes de la métrique de FRW spatialement plate sont, dans le référentiel comobile [113]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (3.14)$$

où  $a(t) > 0$  est le facteur d'échelle. L'espace-temps de FRW spatialement plat peut être découpé en hypersurfaces du genre espace définies par  $t = \text{constante}$ , chaque hypersurface étant plate. On peut voir le facteur d'échelle  $a(t)$  comme une quantité qui décrit la 'taille' d'une hypersurface  $t = \text{constante}$ ; autrement dit,  $a(t)$  donne un ordre de grandeur de la 'dimension spatiale' de l'univers à l'instant  $t$ . Soit la dérivée temporelle  $\dot{a} = da/dt$ . Si  $\dot{a}$  est positif, la dimension spatiale de l'univers augmente avec le temps: on dit alors que l'univers est en expansion. L'expression (3.14) montre que la métrique FRW spatialement plate est complètement caractérisée par un unique champ sur l'espace-temps, le facteur d'échelle  $a$ , qui ne dépend que du temps cosmologique dans le référentiel

comobile. Ce choix de coordonnées met donc en évidence le fait que la métrique FRW spatialement plate est homogène et isotrope spatialement. C'est pourquoi ce système de coordonnées est particulièrement pratique.

On souhaite décrire la diffusion d'une particule ponctuelle relativiste dans le fluide cosmologique, dont la 4-vitesse est notée  $W$ . Le fluide cosmologique suit l'expansion de l'univers; il est au repos dans le référentiel comobile. Ce référentiel est donc un référentiel privilégié pour étudier la diffusion. Les composantes de la 4-vitesse  $W$  dans le référentiel comobile sont bien sûr:  $W^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . L'état thermodynamique du fluide évolue à mesure que l'univers évolue; il peut être décrit simplement par une température  $\Theta$  qui dépend du temps cosmologique  $t$  [84]. Un modèle réaliste de diffusion dans le fluide cosmologique doit donc pouvoir prendre en compte la dépendance de l'état thermodynamique du fluide par rapport à l'évolution de l'univers. On introduit alors la classe d'extensions du ROUP en espace-temps courbe présentée dans la section précédente; chaque processus de la classe est caractérisé par un coefficient de frottement  $\alpha$  et un coefficient de bruit  $D$ , ces deux coefficients étant définis sur le fibré couche de masse  $\mathcal{F}_M$ . Soit le système de coordonnées  $C_{\mathcal{F}_M}$  induit par le système de coordonnées comobiles sur  $\mathcal{F}_M$ ; les coordonnées associées à  $C_{\mathcal{F}_M}$  sont  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ , où  $\mathbf{p}$  représente les trois composantes spatiales de l'impulsion dans le référentiel comobile. Dans  $C_{\mathcal{F}_M}$ , les coefficients  $\alpha$  et  $D$  sont *a priori* des fonctions du temps  $t$ , des trois coordonnées spatiales  $\mathbf{x}$  et des trois coordonnées spatiales d'impulsion  $\mathbf{p}$ . Cependant, en raison de l'homogénéité spatiale du modèle cosmologique considéré, on peut prendre les coefficients  $\alpha$  et  $D$  indépendants des coordonnées spatiales  $\mathbf{x}$ . De plus, par isotropie spatiale, les coefficients  $\alpha$  et  $D$  ne vont dépendre des composantes spatiales de l'impulsion que par l'intermédiaire de la norme euclidienne  $|\mathbf{p}|$  du 3-vecteur  $\mathbf{p}$ . En transcrivant la relation  $g^{\mu\nu}(x)p_\mu p_\nu = 1$  dans les coordonnées comobiles, on obtient l'expression de l'énergie de la particule, c'est-à-dire de la composante  $p_0$  de l'impulsion sur la couche de masse, dans le référentiel comobile:

$$\gamma(t, \mathbf{p}) = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{a^2(t)}}, \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{p}^2 = -p_i p^i$  est le carré de la norme euclidienne du 3-vecteur  $\mathbf{p}$ . On peut voir, d'après l'équation (3.15), que l'énergie  $\gamma(t, \mathbf{p})$  de la particule ne dépend de  $\mathbf{p}$  que par l'intermédiaire de  $|\mathbf{p}|$ . On choisit donc de prendre les coefficients  $\alpha$  et  $D$  comme étant des fonctions de  $t$  et  $\gamma$ , plutôt que de  $t$  et  $|\mathbf{p}|$ . L'équation de transport manifestement covariante associée à cette classe de processus est:

$$\mathcal{D}_\mu (g^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (F_{d,\mu} f) + K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( \tilde{D}(x, p) \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot W} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f \right) = 0; \quad (3.16)$$

les expressions de l'opérateur  $\mathcal{D}_\mu$  et des tenseurs  $F_d$  et  $K$  sont données par (3.6),

(3.2) et (3.4) respectivement, et  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{D}$  sont des fonctions quelconques définies sur le fibré cotangent, mais telles que leur restriction sur la couche de masse soit respectivement  $\alpha$  et  $D$ . Soit le système de coordonnées  $C_{T^*S}$  induit sur le fibré cotangent par le système de coordonnées comobiles; les coordonnées associées à  $C_{T^*S}$  sont  $(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$ . Puisque  $\alpha$  et  $D$  sont des fonctions de  $t$  et  $\gamma$  seulement, il est suffisant en pratique, de prendre les fonctions  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{D}$  comme dépendant de  $t$  et  $p_0$  dans  $C_{T^*S}$ . On a les relations suivantes dans  $C_{\mathcal{F}_M^*}$ :

$$\alpha(t, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\alpha}(t, p_0) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{p})) dp_0 \quad (3.17)$$

et

$$D(t, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{D}(t, p_0) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{p})) dp_0. \quad (3.18)$$

Comme nous l'avons expliqué plus tôt, il est naturel d'étudier la diffusion dans le référentiel comobile. Nous allons donc commencer par écrire l'équation de transport manifestement covariante (3.16) dans ce référentiel. Après un calcul long, mais direct, on obtient que les différents termes de (3.16) se réécrivent de la façon suivante dans le référentiel comobile:

$$\mathcal{D}_\mu (g^{\mu\nu} p_\nu f) = p_0 \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\dot{a}}{a^3} \sum_{i=1}^3 p_i p_i \frac{\partial f}{\partial p_0}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} (F_{d,\mu} f) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_i} (\tilde{\alpha} p_i f) - \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_0} \left( \frac{1}{a^2 p_0} \sum_{i=1}^3 p_i p_i f \right) \quad (3.20)$$

et

$$\begin{aligned} K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( \tilde{D} \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot W} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f \right) = & - \tilde{D} \frac{\partial}{\partial p_0} \left( \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{1}{a^2 p_0} \sum_{i=1}^3 p_i p_i \frac{\partial f}{\partial p_0} \right) \\ & - a^2 p_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \tilde{D} \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{1}{a^2 p_0} p_i \frac{\partial f}{\partial p_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'équation de transport pour la fonction de distribution physique  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  de la particule dans le référentiel comobile s'écrit à partir de l'équation de transport manifestement covariante de la façon suivante:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_0} \mathcal{L}(f) \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{p})) dp_0 = 0. \quad (3.22)$$

Pour restreindre les expressions (3.19), (3.20) et (3.21) des différents termes de l'équation de transport manifestement covariante dans le référentiel comobile sur

la couche de masse, on utilise les relations suivantes. Soit  $h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$  une quantité arbitraire (pas nécessairement scalaire). On définit une nouvelle quantité  $\underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  par:

$$\underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{p \in \mathcal{P}} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0. \quad (3.23)$$

La quantité  $\underline{h}$  est la restriction de  $h$  à la couche de masse. On remarquera en particulier que  $\underline{f} = \Pi$ ,  $\underline{\alpha} = \alpha$  et  $\underline{D} = D$ . En utilisant les propriétés de la distribution de Dirac et l'expression (3.15), on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial x^i} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0 \quad (3.25)$$

et:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathcal{P}} \left[ \frac{\partial}{\partial p_i} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) - \frac{p^i}{p_0} \frac{\partial h}{\partial p_0} \right] \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0. \quad (3.26)$$

En appliquant ces relations à (3.19), (3.20) et (3.21), on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_0} \left[ \mathcal{D}_\mu (g^{\mu\nu} p_\nu f) \right] \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{p})) dp_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{1}{a^2(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ij} \frac{p_j}{\gamma(t, \mathbf{p})} \Pi \right), \quad (3.27)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_0} \left[ \frac{\partial}{\partial p_\mu} (F_{d,\mu} f) \right] \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{p})) dp_0 = - \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \alpha(t, \gamma) \frac{p_i}{\gamma} \Pi \right) \quad (3.28)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_0} \left[ K^{\mu \beta}_{\rho \nu} \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( \tilde{D} \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot W} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f \right) \right] \delta(p_0 - \gamma(t, \mathbf{p})) dp_0 = - \frac{\partial}{\partial p_i} \left( D(t, \gamma) a^2(t) \frac{\partial}{\partial p_i} \Pi \right). \quad (3.29)$$

L'équation de transport pour la fonction de distribution  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  de la particule dans le référentiel comobile s'écrit donc:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{1}{a^2(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ij} \frac{p_j}{\gamma(t, \mathbf{p})} \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \alpha(t, \gamma) \frac{p_i}{\gamma} \Pi + D(t, \gamma) a^2(t) \frac{\partial}{\partial p_i} \Pi \right). \quad (3.30)$$

On peut écrire le système d'équations différentielles stochastiques au sens d'Itô correspondant à (3.30):

$$\begin{aligned} dx_t^i &= -g^{ij} \frac{p_{j,t}}{a^2(t) \gamma(t, \mathbf{p}_t)} dt \\ dp_{i,t} &= -\alpha_I(t, \gamma) \frac{p_{i,t}}{\gamma(t, \mathbf{p}_t)} dt + a(t) \sqrt{2D(t, \gamma)} dB_{i,t}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\alpha_I$  est relié à  $\alpha$  par:

$$\alpha_I(t, \gamma) = \alpha(t, \gamma) - \partial_\gamma D. \quad (3.32)$$

La première équation de (3.31) est la définition dans l'espace-temps cosmologique de l'impulsion de la particule en fonction de la vitesse. La seconde équation de (3.31) est l'équation du mouvement de la particule. Cette équation est une version généralisée en espace-temps de FRW spatialement plat de l'équation de Langevin usuelle.

Soit maintenant  $\bar{\Pi}$  la marginale en  $\mathbf{p}$  de la fonction de distribution  $\Pi$ ;  $\bar{\Pi}$  est définie par l'équation suivante:

$$\bar{\Pi}(t, \mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x. \quad (3.33)$$

La fonction de distribution  $\bar{\Pi}$  vérifie l'équation de transport suivante:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \alpha(t, \gamma) \frac{p_i}{\gamma} \bar{\Pi} + D(t, \gamma) a^2(t) \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{\Pi} \right). \quad (3.34)$$

On peut s'attendre physiquement à ce que la particule se thermalise localement à la température  $\Theta(t)$  sous l'effet de la diffusion. La classe de processus stochastiques que l'on est en train de considérer pour décrire la diffusion doit être construite de telle sorte qu'elle puisse rendre compte de cet effet. Pour cela, on impose que la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$ , donnée par

$$\Pi_J(t, \mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\beta(t) K_2(\beta(t))} \exp(-\beta(t) \gamma(t, \mathbf{p})), \quad (3.35)$$

où  $\beta(t) = 1/\Theta(t)$ , soit solution de l'équation (3.34). On aboutit [32] alors à une relation sous forme différentielle entre les coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  et  $D(t, \gamma)$  caractérisant la classe de processus et la température  $\Theta(t)$  du fluide. Cette relation est de la forme:

$$\partial_\gamma \Delta + f(t, \gamma) \Delta = g(t, \gamma), \quad (3.36)$$

où les coefficients  $f(t, \gamma)$  et  $g(t, \gamma)$  sont donnés par:

$$f(t, \gamma) = \frac{3\gamma}{\gamma^2 - 1} - \beta(t) - \frac{1}{\gamma}, \quad (3.37)$$

$$g(t, \gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left( A_1(t) + A_2(t) \gamma + A_3(t) \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right), \quad (3.38)$$

avec

$$A_1(t) = -3 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \dot{\beta} \frac{K'_2(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad (3.39)$$

$$A_2(t) = -\dot{\beta}, \quad (3.40)$$

$$A_3(t) = \beta \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.41)$$

et la fonction  $\Delta$  est définie comme suit:

$$\Delta(t, \gamma) = \alpha(t, \gamma) - \beta(t)D(t, \gamma), \quad (3.42)$$

où  $\beta(t) = 1/\Theta(t)$ . Si l'on réintroduit provisoirement la constante de Boltzmann  $k_B$  et la masse  $m$  de la particule qui diffuse, la relation (3.42) s'écrit:

$$\Delta(t, \gamma) = \alpha(t, \gamma) - \frac{\beta(t)D(t, \gamma)}{mk_B}, \quad (3.43)$$

Ainsi, la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  est solution de l'équation (3.30) à condition que les coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  et  $D(t, \gamma)$  caractérisant un processus de la classe vérifient l'équation différentielle (3.36). L'équation (3.36) constitue donc une forme différentielle de relation de fluctuation-dissipation dans un univers homogène et isotrope. Lorsqu'on se ramène au cas d'un espace-temps plat, c'est-à-dire en prenant  $a = 1$ , et en considérant que le fluide se trouve à l'équilibre thermodynamique global à une température  $\Theta$  constante, l'équation (3.36) prend la forme:

$$\partial_\gamma \Delta + \tilde{f}(\gamma)\Delta = 0, \quad (3.44)$$

où

$$\tilde{f}(\gamma) = \frac{3\gamma}{\gamma^2 - 1} - \beta - \frac{1}{\gamma}. \quad (3.45)$$

On peut montrer que la seule solution de cette équation qui ne diverge pas pour  $\gamma = 1$ , ce qui correspond à  $|\mathbf{p}| = 0$ , est:  $\Delta = 0$ , c'est-à-dire, d'après (3.43):

$$\alpha(t, \gamma) = \frac{\beta D(t, \gamma)}{mk_B}. \quad (3.46)$$

En choisissant  $\alpha = \text{constante}$  et  $D = \text{constante}$ , on retrouve la relation de fluctuation-dissipation (2.8) valable pour le ROUP en relativité restreinte.

Revenons maintenant au cas de l'espace-temps de FRW spatialement plat. Nous avons résolu l'équation différentielle (3.36) de façon exacte pour des fonctions  $a(t)$  et  $\beta(t)$  quelconques. La solution obtenue est de la forme:

$$\Delta(t, \gamma) = \gamma (\gamma^2 - 1)^{-3/2} \left( \sum_k a_k(t) \frac{1}{\gamma^{2k}} + b(t) \text{Ei}(-\beta(t)\gamma) \exp(+\beta(t)\gamma) \right), \quad (3.47)$$

où Ei est la fonction exponentielle intégrale définie par:

$$\text{Ei}(z) = - \int_{-z}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx. \quad (3.48)$$



L'expression détaillée de la solution exacte de (3.36) est donnée dans [32]. L'équation (3.47) est une relation de fluctuation-dissipation dans un univers homogène et isotrope sous forme intégrale. Nous avons donc construit une classe de processus stochastiques qui décrit la diffusion d'une particule dans le fluide cosmologique dont l'état thermodynamique est caractérisé par la température  $\Theta(t)$ . Chaque processus stochastique de la classe est caractérisé par deux coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  et  $D(t, \gamma)$ , reliés à la température  $\Theta(t)$  du fluide cosmologique et au facteur d'échelle  $a(t)$  par un théorème de fluctuation-dissipation en espace-temps cosmologique.

La fonction  $\Delta$  qui est la solution exacte de (3.36) et dont la forme est donnée par (3.47) dépend du temps  $t$  par l'intermédiaire de deux quantités distinctes:  $\beta$  et  $\dot{a}/a$  [32]. On peut voir cela facilement en reprenant l'équation différentielle (3.36) vérifiée par  $\Delta$  et les expressions (3.37) et (3.38) des coefficients  $f(t, \gamma)$  et  $g(t, \gamma)$  intervenant dans cette équation. Le coefficient  $f(t, \gamma)$  dépend de  $t$  par l'intermédiaire de  $\beta$  seulement, alors que  $g(t, \gamma)$  dépend de  $t$  par l'intermédiaire de  $\beta$  et  $\dot{a}/a$ . Le champ  $\beta$  caractérise l'état thermodynamique du fluide environnant la particule qui diffuse. Le rapport  $(\dot{a}/a)$  décrit la géométrie de l'espace-temps; on a en effet:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6} \left( 2R_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - \Delta_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) - R \right), \quad (3.49)$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci,  $R$  la courbure scalaire et  $\Delta$  le projecteur sur l'orthogonal à la 4-vitesse  $U$ , dont l'expression est donnée par (3.5).

Ainsi, il existe à chaque instant trois échelles de temps distinctes qui interviennent dans la description de la diffusion. La première échelle de temps est associée à la description microscopique de la diffusion: il s'agit du temps caractéristique de collision  $\tau = 1/\alpha$  entre la particule qui diffuse et une particule du fluide. La deuxième échelle de temps est le temps caractéristique  $\beta/\dot{\beta}$  associé à l'évolution de l'état thermodynamique du fluide, et finalement, la troisième échelle de temps est le temps de Hubble  $H^{-1} = a/\dot{a}$ , qui caractérise l'évolution de l'univers. Les échelles de variation de  $a$  et  $\Theta$  sont bien entendu liées par les équations d'Einstein et l'équation d'état du fluide cosmologique. Mais elles ne sont pas nécessairement identiques.

Dans les modèles cosmologiques usuels, il est courant de prendre la température  $\Theta(t)$  comme inversement proportionnelle au facteur d'échelle  $a(t)$  [84]. On a donc, dans ce cas  $\beta(t) \propto a(t)$ . Les deux échelles caractéristiques  $H^{-1}$  et  $\beta/\dot{\beta}$  se réduisent alors à une seule échelle de temps:

$$\frac{\beta}{\dot{\beta}} = H^{-1}. \quad (3.50)$$

Il reste donc deux échelles de temps caractéristiques de la diffusion:  $\alpha$  et  $H^{-1}$ . Nous avons résolu numériquement l'équation différentielle (3.36) dans la configuration  $\beta(t) \propto a(t)$ . Nous avons étudié l'évolution de la quantité adimensionnée

$\Delta_* = H^{-1}\Delta$  en fonction de l'énergie de la particule  $\gamma$  pour différentes valeurs du temps cosmologique  $t$ . On peut trouver une illustration de cette évolution sur la figure 3.1.

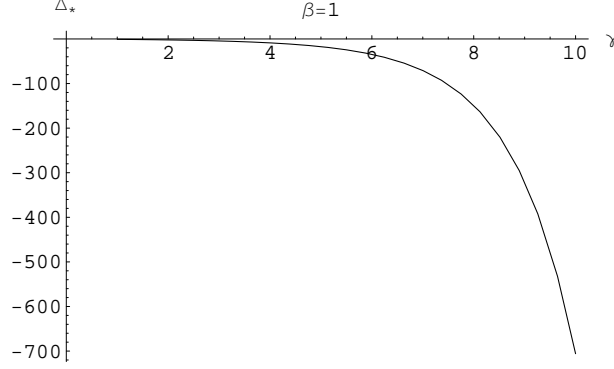


Figure 3.1: Evolution de  $\Delta_*(t, \gamma)$  en fonction de  $\gamma$ , pour  $\beta = 1$ .

Cette évolution est sensiblement la même pour toutes les valeurs de  $t$  que nous avons considérées. La courbe présentée sur la figure 3.1 est donc générique. Prenons le cas où l'univers est en expansion, ce qui correspond, comme on l'a vu, à  $\dot{a} > 0$ . On a alors  $H^{-1} > 0$ . On peut voir sur la figure 3.1 que dans ce cas,  $\Delta_*$  est négative quelque soient les valeurs de  $t$  et  $\gamma$ . En reprenant l'expression (3.43) de  $\Delta$ , on voit que cela correspond à

$$\alpha(t, \gamma) < \frac{\beta(t)D(t, \gamma)}{mk_B}. \quad (3.51)$$

Or le théorème de fluctuation-dissipation en espace-temps plat s'écrit:

$$\alpha = \frac{\beta D}{mk_B}. \quad (3.52)$$

Le résultat que l'on obtient peut s'interpréter de la façon suivante. Supposons que le coefficient de frottement  $\alpha$  soit connu. A  $\alpha$  fixé, le bruit nécessaire pour compenser la dissipation par force de frottement et ainsi assurer que la particule se thermalise localement à la température  $\Theta(t)$  du fluide par diffusion dans un univers en expansion est supérieur au bruit qui serait nécessaire pour assurer la thermalisation de la particule à la température du fluide environnant dans un espace-temps plat.

Le modèle que nous avons présenté dans cette section est un modèle simple de diffusion dans un espace-temps homogène et isotrope. Les espace-temps homogènes et isotropes constituent des modèles très simples qui décrivent les propriétés de l'univers aux grandes échelles seulement. Notre modèle se contente

donc de décrire les aspects grandes échelles de phénomènes de diffusion dans l'univers. Les inhomogénéités présentes sur les plus petites échelles, comme les fluctuations de densité ne sont pas considérées. Si l'on se fonde sur le travail présenté dans le premier chapitre de ce mémoire, il n'est pas du tout trivial que ces variations à petites échelles n'aient pas des effets non négligeables sur les propriétés aux grandes échelles des phénomènes de diffusion. Une prochaine étape serait donc d'étendre le modèle présenté ici afin de pouvoir prendre en compte et étudier les éventuelles répercussions des fluctuations aux petites échelles sur la description aux grandes échelles des phénomènes de diffusion.



## Chapitre 4

# Une approche unifiée des différents processus stochastiques relativistes existant

### 4.1 Une façon naturelle de construire des processus stochastiques relativistes

La construction de ROUP est une illustration dans un cas particulier simple, d'une méthode naturelle de construction de processus stochastiques en espace-temps relativiste. Nous exposons maintenant cette méthode, dans le cas général.

On se place en relativité restreinte. L'espace-temps  $\mathcal{S}$  est donc muni de la métrique de Minkowski  $\eta$ . On ne considèrera que des systèmes de coordonnées inertiels, dans lesquels les composantes de  $\eta$  s'écrivent:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Soit un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , et soit  $C$  un système de coordonnées inertiel appartenant à  $\mathcal{R}$ . Les coordonnées dans  $C$  de la particule ponctuelle qui diffuse sont notées  $(t, \mathbf{x})$ . Le système de coordonnées induit par  $C$  sur le fibré couche de masse est noté  $C_M$ . Les coordonnées associées à  $C_M$  sont  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ , où  $\mathbf{p}$  représente la 3-impulsion de la particule dans  $C$ . On considère dans  $C_M$  le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= \eta^{ij} \frac{p_{j,t}}{\gamma(\mathbf{p}_t)} dt \\ dp_{i,t} &= {}^{(S)}\phi_i(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dt + \sigma_{ij}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dB_t^j, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où l'on rappelle que  $\gamma(\mathbf{p})$  est le facteur de Lorentz, exprimé ici comme une variable de la 3-impulsion  $\mathbf{p}$ :

$$\gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}, \quad (4.2)$$

et les  $(B_t^i), i = 1, 2, 3$  sont trois mouvements browniens indépendants. L'exposant  $(S)$  signifie que le système d'équations (4.1) est à prendre au sens de Stratonovich [97]. La première équation de (4.1) est la définition relativiste de l'impulsion de la particule ponctuelle en fonction de la vitesse. La seconde équation est l'équation du mouvement de la particule dans  $C$ . On peut voir dans cette équation que la force s'exerçant sur la particule est formée de deux contributions différentes: une contribution déterministe, qui représente la force moyenne agissant sur la particule, et une contribution stochastique qui constitue la source de bruit du mouvement. Ainsi ce système d'équations différentielles stochastiques décrit une diffusion dans l'espace des  $\mathbf{p}$  sous la forme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck [112] généralisé, et la diffusion dans l'espace des  $\mathbf{x}$  est la trajectoire spatiale de la particule ponctuelle, induite par la diffusion dans l'espace des  $\mathbf{p}$ , et indexée par la coordonnée  $t$ . Le système d'équations différentielles stochastiques (4.1) définit donc un processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé dans  $\mathcal{R}$ .

Considérons maintenant un nouveau référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  sur  $\mathcal{S}$ . Comment peut-on décrire le processus défini par (4.1) dans ce nouveau référentiel? Pour répondre à cette question, on commence par réécrire (4.1) sous une forme plus compacte:

$$dZ_t^k = {}^{(S)}\Phi^k(Z_t) dt + \Sigma_t^k(Z_t) d\mathcal{B}_t^l, \quad (4.3)$$

où la variable  $Z$  est définie par:  $Z = (Z^k) = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , et:

$$\begin{aligned} {}^{(S)}\Phi^0 &= 1 \\ {}^{(S)}\Phi^k &= v^k, & \text{si } k \in \{1, 2, 3\} \\ {}^{(S)}\Phi^k &= {}^{(S)}\phi_{k-3}, & \text{si } k \in \{4, 5, 6\} \\ \Sigma_t^k &= 0, & \text{si } (k, l) \notin \{4, 5, 6\}^2 \\ \Sigma_t^k &= \sigma_{(k-3)(l-3)}, & \text{si } (k, l) \in \{4, 5, 6\}^2 \\ \mathcal{B}_t^k &= 0, & \text{si } k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \mathcal{B}_t^k &= B_t^{k-3}, & \text{si } k \in \{4, 5, 6\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

L'étape suivante consiste à transcrire le système d'équations différentielles (4.3) en un système d'équations différentielles stochastiques dans  $\mathcal{R}'$ . Soit  $C'$  un système de coordonnées inertiel associé à  $\mathcal{R}'$ , et soit  $C'_M$  le système de coordonnées induit par  $C'$  sur le fibré couche de masse, avec pour coordonnées associées  $Z' = (t', \mathbf{x}', \mathbf{p}')$ . La transformation de Lorentz permettant de passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  induit sur le fibré couche de masse le changement de coordonnées caractérisé par la matrice  $\partial Z'^k / \partial Z^l$  et assurant le passage de  $C_M$  à  $C'_M$ . Il est possible d'appliquer directement ce changement de coordonnées aux équations différentielles stochastiques du système (4.3) car ces équations sont définies au sens de Stratonovich [97]. En effet, on ne peut utiliser les formules de différentiation usuelles pour un processus stochastique que si le processus en question est un processus de Stratonovich [97].

Autrement dit, si le système d'équations différentielles stochastiques dont on dispose dans  $C_M$  n'était pas défini au sens de Stratonovich, mais au sens d'Itô, par exemple, il serait nécessaire de transcrire ce système en un système d'équations différentielles stochastiques au sens de Stratonovich avant de pouvoir effectuer le changement de coordonnées permettant de passer de  $C_M$  à  $C'_M$  [97]. En appliquant le changement de coordonnées caractérisé par  $\partial Z'^k / \partial Z^l$  au système (4.3), on obtient le système d'équations différentielles stochastiques suivant:

$$dZ_t'^k = {}^{(S)}\tilde{\Phi}'^k(Z_t')dt + \tilde{\Sigma}_t'^k(Z_t')d\mathcal{B}_t^l, \quad (4.5)$$

avec

$${}^{(S)}\tilde{\Phi}'^k(Z_t') = \frac{\partial Z'^k}{\partial Z^l} \Big|_{Z_t'} {}^{(S)}\Phi^l(Z_t(Z_t')), \quad (4.6)$$

et

$$\tilde{\Sigma}_t'^k(Z_t') = \frac{\partial Z'^k}{\partial Z^m} \Big|_{Z_t'} \frac{\partial Z^n}{\partial Z'^l} \Big|_{Z_t'} \Sigma_n^m(Z_t(Z_t')). \quad (4.7)$$

Le processus stochastique décrit par (4.5) est indexé par le temps  $t$ . Mais on se trouve maintenant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , auquel est associé le temps  $t'$ . Il apparaît donc naturel de transcrire ce processus stochastique en un processus stochastique indexé par  $t'$ . Pour passer de  $t$  à  $t'$ , il est nécessaire de réaliser un changement stochastique de temps. Or il se trouve qu'un changement stochastique de temps ne peut s'effectuer simplement que sur un processus d'Itô. On commence donc par écrire les équations différentielles stochastiques au sens d'Itô [97] correspondant à (4.5). Ces équations sont:

$$dZ_t'^k = {}^{(I)}\tilde{\Phi}'^k(Z_t')dt + \tilde{\Sigma}_t'^k(Z_t')d\mathcal{B}_t^l, \quad (4.8)$$

avec

$${}^{(I)}\tilde{\Phi}'^k = {}^{(S)}\tilde{\Phi}'^k + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial \tilde{\Sigma}_t'^k}{\partial Z^m} \tilde{\Sigma}_t'^m. \quad (4.9)$$

On peut maintenant réaliser le changement stochastique de temps [97] de  $t$  à  $t'$ , caractérisé par  $dt' = A^{-1}(Z_t')dt$ , où l'on a, d'après l'équation (4.8),  $A^{-1} = {}^{(I)}\tilde{\Phi}'^0$ . On aboutit alors au système d'équations différentielles stochastiques au sens d'Itô suivant [97]:

$$dZ_{t'}'^k = {}^{(I)}\Phi'^k(Z_{t'}')dt' + \Sigma_{t'}'^k(Z_{t'}')d\mathcal{B}_{t'}^l, \quad (4.10)$$

avec

$${}^{(I)}\Phi'^k = A {}^{(I)}\tilde{\Phi}'^k, \quad (4.11)$$

et

$$\Sigma_{t'}'^k = \sqrt{A} \tilde{\Sigma}_t'^k. \quad (4.12)$$

Le système d'équations différentielles au sens de Stratonovich associé à (4.10) vérifie [97]:

$$dZ'^k = {}^{(S)}\Phi'^k(Z')dt' + \Sigma'_l{}^k(Z')dB'^l, \quad (4.13)$$

avec

$${}^{(S)}\Phi'^k = {}^{(I)}\Phi'^k - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial \Sigma'_l{}^k}{\partial Z'^m} \Sigma'^m_l. \quad (4.14)$$

Comme la matrice de changement de coordonnées  $\partial Z'^k / \partial Z^l$  est associée à une transformation de Lorentz, elle ne mélange pas les coordonnées spatio-temporelles et les coordonnées associées à l'impulsion. Les équations (4.7) et (4.12) montrent alors que  $\Sigma'_l{}^k$  s'annule si  $(k, l) \notin \{4, 5, 6\}^2$ . Par conséquent, l'équation (4.13) a la même structure que l'équation (4.3), les différentielles  $dB'^l$  n'apparaissant que dans les équations stochastiques vérifiées par  $\mathbf{p}'$ . La forme (4.3) est donc stable par changement de coordonnées inertiel sur l'espace-temps. Le système d'équations différentielles stochastiques (4.3) peut donc être utilisé pour définir un processus stochastique relativiste sur l'espace-temps  $\mathcal{S}$ . On peut en effet déduire de (4.3) les équations différentielles stochastiques décrivant ce processus stochastique dans un référentiel inertiel quelconque, puis l'équation de transport associée à ces nouvelles équations différentielles stochastiques.

## 4.2 Une classe particulière de processus stochastiques relativistes

### 4.2.1 Définition de la classe

La classe  $\mathcal{C}$  de processus stochastiques relativistes que l'on considère ici est construite de la façon suivante. Tous les processus appartenant à  $\mathcal{C}$  sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisés; la force qui agit sur la particule est donc la superposition de deux contributions: une contribution déterministe et une contribution stochastique. Pour chaque processus de  $\mathcal{C}$ , il existe en chaque point  $Z$  de la trajectoire de la particule dans l'espace des phases, un référentiel de Lorentz dépendant de  $Z$  et du processus considéré, noté  $\mathcal{R}^*(Z)$ , dans lequel le terme de bruit agissant sur la particule est, au point  $Z$ , un bruit blanc gaussien d'amplitude donnée, indépendante de  $Z$ . Chaque processus de la classe est ainsi caractérisé par un choix de la force déterministe et un choix du référentiel inertiel  $\mathcal{R}^*(Z)$  en chaque point  $Z$ .

Soit un référentiel inertiel quelconque  $\mathcal{R}$ , et soit  $\mathcal{C}$  un système de coordonnées associé à  $\mathcal{R}$ , les coordonnées correspondantes sont  $(t, \mathbf{x})$ . Le système de coordonnées induit par  $\mathcal{C}$  sur le fibré couche de masse est noté  $\mathcal{C}_M$ . Un point de la trajectoire dans l'espace des phases de la particule est indexé dans  $\mathcal{C}_M$  par



$Z = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Fixons un processus de la classe  $P$  et un point  $Z_0$  sur la trajectoire de la particule qui diffuse. Le référentiel inertiel  $\mathcal{R}^*(Z_0)$  associé au point  $Z_0$  peut être représenté par son champ de 3-vitesse  $\mathbf{u}(Z_0)$  par rapport au référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . Soit  $C^*$  un système de coordonnées inertiel appartenant à  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ . Ce système induit sur le fibré couche de masse le système de coordonnées  $C_{\mathcal{M}}^*$ , les coordonnées associées à  $C_{\mathcal{M}}^*$  sont notées  $Z^* = (t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ ; ces coordonnées dépendent bien sûr de  $Z_0$ , mais sont définies sur toute la variété d'espace-temps. Leur valeur en  $Z_0$  est notée  $Z_0^* = (t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \mathbf{p}_0^*)$ . Le processus  $P$  est représenté, dans  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ , par un système d'équations différentielles stochastiques de la forme:

$$\begin{aligned} dx_{t^*}^{*i} &= \eta^{ij} \frac{p_{j,t^*}}{\gamma(\mathbf{p}_{t^*}^*)} dt^* \\ dp_{i,t^*}^* &= {}^{(S)}\phi^*(Z_{t^*}^*) dt^* + \sigma_{ij}^*(Z_{t^*}^*) dB_{t^*}^j, \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  ${}^{(S)}\phi^*$  est la 3-force déterministe agissant sur la particule qui diffuse dans  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ . La propriété fondamentale montrant que  $P$  appartient à la classe  $C$  est le fait que le bruit intervenant dans (4.15) est, en  $Z_0^*$ , un bruit blanc gaussien:

$$\sigma_{ij}^*(Z_0^*) = \sqrt{2D} \eta_{ij}. \quad (4.16)$$

Voyons maintenant comment on peut décrire le processus  $P$  dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ .

## 4.2.2 Description de la classe dans un référentiel inertiel quelconque

Les équations stochastiques du mouvement décrivant le processus  $P$  dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  peuvent être déduites de (4.15) et (4.16) en faisant, pour chaque  $Z_0$  une transformation de Lorentz de  $\mathcal{R}^*(Z_0)$  à  $\mathcal{R}$ , suivie d'un changement stochastique de temps de  $t^*$  à  $t$ . L'obtention du terme déterministe dans  $\mathcal{R}$  ne pose aucun problème particulier. Celle du terme de bruit est plus subtile. Fixons en effet un  $Z_0$ ; soient

$$\begin{aligned} dx_{t^*}^i &= \tilde{b}^{*i}(Z_{t^*}^*) dt^* \\ dp_{i,t^*} &= {}^{(S)}\tilde{\phi}_i^*(Z_{t^*}^*) dt^* + \tilde{\sigma}_{ij}^*(Z_{t^*}^*) dB_{t^*}^j \end{aligned} \quad (4.17)$$

les équations différentielles stochastiques de Stratonovich décrivant le processus dans  $\mathcal{R}$ , mais utilisant le temps  $t^*$  de  $\mathcal{R}^*(Z_0)$  comme paramètre. La transformation de Lorentz de  $\mathcal{R}^*(Z_0)$  à  $\mathcal{R}$  appliquée à (4.16) fournit la valeur de  $\tilde{\sigma}_{ij}^*$  en  $Z_0$ . Changer le paramètre temporel de  $t^*$  à  $t$  nécessite de transformer (4.17) en un système d'Itô [97]. Il faut pour cela accéder à la valeur que prend en  $Z_0$  la dérivée de  $\tilde{\sigma}_{ij}^*(Z_{t^*}^*)$  par rapport à  $Z_{t^*}^*$ , ce qui nécessite de connaître  $\tilde{\sigma}_{ij}^*$  en des points  $Z_0 + \delta Z$ .

Cette information peut être obtenue en appliquant à (4.16) une transformation de Lorentz faisant passer de  $\mathcal{R}^*(Z_0 + \delta Z)$  à  $\mathcal{R}$ . Le calcul complet est assez lourd et subtil; on pourra en trouver les détails dans la section 2.2 de [27].

On obtient finalement le système d'équations différentielles stochastiques suivant, dans  $\mathcal{R}$  [27]:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= v^i(Z_t) dt \\ dp_{i,t} &= {}^{(I)}\phi_i(Z_t)dt + \sigma_{ij}(Z_t)dB_t^j, \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec

$$v^i(Z) = \eta^{ij} \frac{p_j}{\gamma(\mathbf{p})}, \quad (4.19)$$

$${}^{(I)}\phi_i(Z) = H_i(Z) + I_i(Z) + J_i(Z), \quad (4.20)$$

$$H_i(Z) = \frac{p \cdot U}{\gamma(\mathbf{p})} {}^{(S)}\phi_i^* - \frac{u_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1 - \Gamma)}{\mathbf{u}^2} {}^{(S)}\phi_j^* u^j + \Gamma {}^{(S)}\phi_j^* p^j \right], \quad (4.21)$$

$$I_i(Z) = D \frac{\Gamma}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)^2} \left[ u_i (1 + 2(p \cdot U)^2) - \Gamma^2 \gamma(\mathbf{p}) u_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} + \Gamma \gamma(\mathbf{p})(p \cdot U) p_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \right], \quad (4.22)$$

$$J_i(Z) = -\frac{D}{2} \frac{\Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)^2} p \cdot \frac{\partial U}{\partial p_j} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right] \quad (4.23)$$

et, finalement:

$$\sigma_{ij}(Z) = -\sqrt{2D} \sqrt{\frac{1}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)}} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1 - \Gamma)}{\mathbf{u}^2} u_i u_j + \Gamma u_i p_j - (p \cdot U) \eta_{ij} \right]. \quad (4.24)$$

Dans les équations (4.21) à (4.24), nous avons introduit la 4-vitesse  $U$ , ainsi que le facteur de Lorentz  $\Gamma = (1 - \mathbf{u}^2)^{-1/2}$ , associés à la 3-vitesse  $\mathbf{u}$ .

L'équation de transport associée à (4.18) est:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} (\psi_i \Pi) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( A_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \right), \quad (4.25)$$

avec

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{D \Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})} \frac{1}{p \cdot U} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right], \quad (4.26)$$

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} - {}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (4.27)$$

et  $\Pi$  est la fonction de distribution dépendant du temps dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ , muni de la mesure de Lebesgue  $d^3 x d^3 p$ .

Dans  $\mathcal{R}$ , chaque processus de la classe  $C$  est complètement déterminé par le choix de la 3-force déterministe  $\psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  et par le choix du champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ .

### 4.2.3 Equation de transport manifestement covariante

Le système (4.18) ou, de façon équivalente, l'équation de transport (4.25), caractérisent complètement la classe de processus dans un référentiel inertiel quelconque  $\mathcal{R}$ . Cependant, ces équations sont lourdes et difficiles à manipuler. Il existe une façon plus directe d'obtenir l'équation de transport caractérisant la classe de processus dans un référentiel inertiel quelconque, sans passer par les équations différentielles stochastiques dans ce référentiel. Cette méthode consiste à introduire une équation de transport manifestement covariante pour l'ensemble des processus de la classe. Pour cela, on procède de la même façon que pour le ROUP (section 2.3): on transcrit l'équation de transport (4.25) hors de la couche de masse, et on traite  $p_0$  comme indépendante de la 3-impulsion  $\mathbf{p}$  [76, 7]. On introduit ainsi une nouvelle fonction de distribution  $f$ , qui dépend de  $(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$ , et dont la restriction sur la couche de masse est égale à la fonction de distribution physique  $\Pi$ . L'équation de transport (4.25) est alors remplacée par une équation de transport manifestement covariante, c'est-à-dire une équation manifestement covariante vérifiée par la fonction de distribution  $f$  et dont la validité est une condition suffisante pour la validité de l'équation de transport (4.25) sur la couche de masse. L'équation de transport manifestement covariante la plus simple que l'on puisse obtenir s'écrit:

$$\mathcal{L}(f) = 0, \quad (4.28)$$

avec

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\Xi_\mu f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot V} \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right), \quad (4.29)$$

où  $V$  est un champ de 4-vitesse défini hors de la couche de masse, et dont la restriction sur la couche de masse est la 4-vitesse  $U$ ,

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = V^\mu V^\beta \Delta^{\rho\nu} - V^\mu V^\nu \Delta^{\rho\beta} + V^\rho V^\nu \Delta^{\mu\beta} - V^\rho V^\beta \Delta^{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

et  $\Delta$  est le projecteur orthogonal à  $V$ :

$$\Delta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \quad (4.31)$$

Soit  $\xi$  une 3-force définie hors de la couche de masse, dont la restriction sur la couche de masse est la 3-force  $\psi$ . Dans l'équation (4.29),  $\Xi$  est une 4-force définie hors de la couche de masse, reliée à  $\xi$  par:

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= p^i \xi_i \\ \Xi_i &= -p_0 \xi_i. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Remarquons que l'on a  $\Xi \cdot p = 0$ , y compris pour des impulsions définies hors de la couche de masse.

L'équation de transport manifestement covariante présente l'avantage de refléter clairement la définition de la classe  $C$ , dans le sens où la structure tensorielle du terme de bruit présent dans cette équation est la même pour tous les processus de  $C$ . Seul le choix du champ de 4-vitesse  $V$ , défini hors de la couche de masse et qui intervient dans ce terme de bruit, peut changer d'un processus de la classe  $C$  à un autre.

L'équation de transport manifestement covariante permet de plus d'obtenir directement l'équation de transport (3+1) caractérisant la classe  $C$  dans un référentiel inertiel quelconque  $\mathcal{R}'$ . Pour cela, on écrit l'équation de transport manifestement covariante dans  $\mathcal{R}'$ , puis on restreint l'équation ainsi obtenue sur la couche de masse.

## 4.3 Processus particuliers de la classe

### 4.3.1 Le ROUP

On rappelle que le ROUP décrit la diffusion d'une particule ponctuelle dans un fluide environnant [46, 8, 7]. Ce fluide environnant est isotrope et supposé à l'équilibre thermodynamique global à la température  $\Theta$ . On note  $W$  la 4-vitesse de ce fluide et  $\mathcal{R}_W$  est le référentiel inertiel dans lequel le fluide est au repos. Le fait que le fluide est isotrope conduit naturellement à choisir  $\mathcal{R}^*(Z_0) = \mathcal{R}_W$  pour tout  $Z_0$ . La force déterministe agissant sur la particule est une force de frottement; l'expression de cette force dans  $\mathcal{R}_W$  est donnée par:

$$\left({}^{(S)}\phi_W\right)_i(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = -\alpha \frac{P_i}{\gamma(\mathbf{P})}. \quad (4.33)$$

L'équation de transport pour le ROUP dans  $\mathcal{R}_W$  vérifie:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \left( \frac{\mathbf{X}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left( -\alpha \frac{\mathbf{P}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) = D \Delta_{\mathbf{P}} \Pi. \quad (4.34)$$

L'équation de transport dans un référentiel inertiel quelconque  $\mathcal{R}$  est donnée par (4.25), avec:

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{D \Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})} \frac{1}{p \cdot W} \left[ \left( \frac{p \cdot W}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot W}{\Gamma} \right) (w_i p_j + w_j p_i) + w_i w_j \right] \quad (4.35)$$

et

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left({}^{(S)}\phi_W\right)_i - \frac{w_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1 - \Gamma)}{\mathbf{w}^2} \left({}^{(S)}\phi_W\right)_j w^j + \Gamma \left({}^{(S)}\phi_W\right)_j p^j \right]. \quad (4.36)$$

L'équation de transport manifestement covariante est donnée par (4.28) et (4.29), où l'on prend  $V = W$ , et [7]

$$\Xi_\mu = -\lambda_\mu^\nu p_\nu p \cdot p + \lambda^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (4.37)$$

avec

$$\lambda_\nu^\mu = \frac{\alpha}{(p \cdot W)^2} \Delta_\nu^\mu, \quad (4.38)$$

où  $\Delta$  représente le projecteur sur l'orthogonal à  $V$ , dont l'expression est donnée par (4.31).

On peut montrer que l'équation (4.28) admet la distribution de Jüttner hors couche de masse, donnée par

$$f_J(p) = \frac{1}{4\pi} \frac{\beta}{K_2(\beta)} \exp(-\beta W^\mu p_\mu), \quad (4.39)$$

comme solution stationnaire à condition que l'inverse de la température du fluide  $\beta$ , le coefficient de frottement  $\alpha$  et le coefficient de bruit  $D$  vérifient la relation  $\alpha = \beta D / m k_B$ . Cette dernière relation constitue ainsi une extension de la relation de fluctuation-dissipation relativiste (2.8) hors de la couche de masse. On met ainsi en évidence qu'il est possible techniquement de construire une relation de fluctuation-dissipation sans qu'il soit nécessaire de réaliser une projection sur la couche de masse.

### 4.3.2 Le processus de Franchi-Le Jan

Le processus de Franchi-Le Jan [62, 61, 4] est construit, en choisissant comme référentiel  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ , pour tout  $Z_0$ , le référentiel propre de la particule en  $Z_0$ , et en prenant la force déterministe agissant sur la particule égale à zéro. Ainsi, ce processus ne décrit pas la diffusion d'une particule en interaction avec un fluide environnant usuel. Il a été suggéré que le processus de Franchi-Le Jan est un modèle de diffusions induites par des interactions avec des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation [50]. Le processus de Franchi-Le Jan possède l'invariance par l'action du groupe des isométries lorentziennes, quelle que soit la variété lorentzienne considérée.

L'équation de transport décrivant le processus de Franchi-Le Jan dans un référentiel inertiel quelconque est donnée par (4.25), avec:

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} [p_i p_j - \eta_{ij}], \quad (4.40)$$

et

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0. \quad (4.41)$$

On peut réécrire cette équation comme suit:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} \Delta_m \Pi, \quad (4.42)$$

où  $m$  est la métrique induite par la métrique de Minkowski  $\eta$  sur la couche de masse, et  $\Delta_m$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami [51] associé à  $m$ . Les composantes de la matrice inverse  $m^{-1}$  sont données par  $m^{ij} = p^i p^j - \eta^{ij}$  et l'opérateur de Laplace-Beltrami est défini par:

$$\Delta_m = \frac{1}{\sqrt{\det m_{ij}}} \frac{\partial}{\partial p^i} \left( \sqrt{\det m_{ij}} m^{ij} \frac{\partial}{\partial p^j} \right), \quad (4.43)$$

où  $\det m_{ij} = \gamma^{-2}(\mathbf{p})$ . L'équation de transport manifestement covariante est donnée par (4.28) et (4.29), avec  $\Xi_\mu = 0$ . Le terme de bruit se simplifie parce qu'on peut choisir  $V = p$  pour ce processus. L'équation de transport manifestement covariante pour le processus de Franchi-Le Jan s'écrit donc:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D (\eta_{\rho\nu} - p_\rho p_\nu) \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right) = 0. \quad (4.44)$$

Le comportement asymptotique du processus de Franchi-Le Jan peut être caractérisé de façon intuitive: la vitesse d'une particule qui diffuse selon ce processus tend asymptotiquement vers la vitesse de la lumière  $c$ . En effet, le processus de Franchi-Le Jan fournit de l'agitation à la particule par l'intermédiaire du bruit blanc gaussien, mais cette agitation n'est pas contrebalancée par une force de frottement.

### 4.3.3 Le processus de Dunkel-Hänggi

Le processus de Dunkel-Hänggi [53, 54] mélange les caractéristiques du ROUP et du processus de Franchi-Le Jan. Ce processus peut être présenté au mieux comme décrivant l'interaction d'une particule ponctuelle avec un fluide. On introduit une 4-vitesse  $W$  et un référentiel propre  $\mathcal{R}_W$  pour ce fluide. La force déterministe agissant sur la particule est une force de frottement. L'expression de cette force dans  $\mathcal{R}_W$  est donnée par:

$$\left( {}^{(l)}\phi_W \right)_i (T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = -\nu P_i + \frac{3DP_i}{\gamma(\mathbf{P})}, \quad (4.45)$$

où  $\nu$  est un coefficient de frottement positif. Le terme de bruit est identique au terme de bruit du processus de Franchi-Le Jan. Il est donc isotrope dans le référentiel propre de la particule à chaque instant, et non dans le référentiel propre  $\mathcal{R}_W$  du

fluide. Par conséquent, le processus de Dunkel-Hänggi ne semble pas décrire des diffusions dans des fluides isotropes standard.

L'équation de transport dans le référentiel  $\mathcal{R}_W$  est donnée par:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{P^i}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) = \frac{\partial}{\partial P_i} (\nu P_i \Pi) + \frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \left( \frac{D}{\gamma(\mathbf{P})} (P_i P_j - \eta_{ij}) \right) \frac{\partial \Pi}{\partial P_j} \right]. \quad (4.46)$$

L'équation de transport dans un référentiel inertiel quelconque  $\mathcal{R}$  est (4.25), avec

$$A_{ij} = -\frac{1}{2} \sigma_{il} \sigma_{kj}^T \eta^{kl} \quad (4.47)$$

et

$$\psi_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} - {}^{(I)}\phi_i, \quad (4.48)$$

où

$$\sigma_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})}} (\sigma_W)_{kj} \left[ \delta_i^k - \frac{w_i}{p \cdot W} \left( \frac{(1 - \Gamma(\mathbf{w})) \gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{w}^2} w^k + \Gamma(\mathbf{w}) p^k \right) \right], \quad (4.49)$$

$${}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left( {}^{(S)}\phi_i - \frac{1}{2} \eta^{jl} \sigma_{kl} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial p_k} \right), \quad (4.50)$$

$${}^{(S)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_i - \frac{w_i}{p \cdot W} \left( \frac{(1 - \Gamma(\mathbf{w})) \gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{w}^2} w^k \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_k + \Gamma(\mathbf{w}) p^k \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_k \right), \quad (4.51)$$

$$\left( {}^{(S)}\phi_W \right)_i = \left( {}^{(I)}\phi_W \right)_i + \frac{1}{2} \eta^{jl} (\sigma_W)_{kl} \frac{\partial (\sigma_W)_{ij}}{\partial p_k} \quad (4.52)$$

et

$$(\sigma_W)_{ij}(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = \sqrt{\frac{2D}{\gamma(\mathbf{P})}} \left[ \frac{1 - \gamma(\mathbf{P})}{\mathbf{P}^2} P_i P_j + \eta_{ij} \right]. \quad (4.53)$$

L'équation de transport manifestement covariante est donnée par (4.28), avec (4.29), où

$$\Xi_\mu = -\tilde{\lambda}_\mu^\nu p_\nu p \cdot p + \tilde{\lambda}^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (4.54)$$

$$\tilde{\lambda}_\nu^\mu = \frac{\nu}{(p \cdot W)} \tilde{\Delta}_\nu^\mu, \quad (4.55)$$

et  $\tilde{\Delta}$  est le projecteur sur l'orthogonal à  $W$ :

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - W_\mu W_\nu. \quad (4.56)$$

Le terme de bruit de l'équation de transport manifestement covariante se simplifie de la même façon que dans l'équation (4.44).

## 4.4 Un théorème $H$ pour l'ensemble des processus de la classe

La structure de l'équation de transport manifestement covariante, donnée par (4.28), avec (4.29), permet de démontrer simplement un nouveau théorème  $H$ , commun à tous les processus de la classe.

Soient  $f$  et  $g$  deux solutions de l'équation (4.28). Le 4-courant  $S_{[f|g]}$  de l'entropie conditionnelle de  $f$  par rapport à  $g$  est défini par [90, 7, 103]:

$$S_{[f|g]}^\mu(x) = - \int p^\mu f(x, p) \ln \left( \frac{f(x, p)}{g(x, p)} \right) D^4 p, \quad (4.57)$$

avec  $D^4 p = \theta(p_0) \delta(p^2 - 1) d^4 p$ , où  $\theta$  est la fonction de Heaviside et  $\delta$  la distribution de Dirac. La première étape dans la démonstration du théorème  $H$  est d'évaluer la 4-divergence de ce courant et d'utiliser l'équation de transport manifestement covariante pour transformer toutes les dérivées d'espace-temps en dérivées par rapport à l'impulsion. En intégrant par parties, on obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \partial_\mu S_{[f|g]}^\mu &= \int \left\{ \partial_{p_\nu} (J_{\mu\nu} f) - \partial_{p_\nu} (J_{\mu\nu} g) \frac{f}{g} \right\} \partial_{p_\mu} \ln \left( \frac{f}{g} \right) D^4 p \\ &+ \int \left\{ \mathcal{K}_\mu(g) \frac{f}{g} - \mathcal{K}_\mu(f) \left[ 1 + \ln \left( \frac{f}{g} \right) \right] \right\} \partial_{p_\mu} (D^4 p), \end{aligned} \quad (4.58)$$

avec

$$J_{\mu\nu} = -DK^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu \frac{p_\alpha p_\beta}{p \cdot V}, \quad (4.59)$$

$$\mathcal{K}_\mu(f) = I_\mu f - \frac{\partial}{\partial p_\nu} (J_{\mu\nu} f), \quad (4.60)$$

où

$$I_\mu = -DK^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left( \frac{p_\alpha p_\beta}{p \cdot V} \right) + \Xi_\mu. \quad (4.61)$$

Un calcul direct montre que  $\partial_{p_\mu} D^4 p = 2p^\mu \theta(p_0) \delta'(p^2 - m^2 c^2) d^4 p$ . La seconde intégrale de (4.58) fait ainsi intervenir des contractions de la forme  $p^\mu \mathcal{K}_\mu(u)$ , où la fonction  $u$  est soit  $f$  soit  $g$ . En remplaçant  $\mathcal{K}$  par sa définition (4.60), on obtient:

$$\begin{aligned} p^\mu \mathcal{K}_\mu(u) &= p^\mu \left\{ I_\mu u - \frac{\partial}{\partial p_\nu} (J_{\mu\nu} u) \right\} \\ &= DK^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu p^\mu \frac{p_\alpha p_\beta}{p \cdot V} \frac{\partial u}{\partial p_\nu} + p^\mu \Xi_\mu u. \end{aligned} \quad (4.62)$$



Le tenseur  $K^{\alpha\mu\beta\nu}$  est antisymétrique par échange des indices  $\mu$  and  $\alpha$ , ce qui implique que  $K^{\alpha\mu\beta\nu} p_\alpha p_\mu p_\beta = 0$ ; de plus la 4-force déterministe  $\Xi$  est orthogonale à l'impulsion  $p$ , *i.e.*  $p^\mu \Xi_\mu = 0$ . L'équation (4.62) se réduit donc à:

$$p^\mu \mathcal{K}_\mu(u) = 0. \quad (4.63)$$

L'équation (4.58) se simplifie donc de la façon suivante:

$$\partial_\mu S_{[f/g]}^\mu(x) = \int J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g] D^4 p, \quad (4.64)$$

où  $J$  est défini par l'équation (4.59) et la fonctionnelle  $\mathcal{D}$  est donnée par:

$$\mathcal{D}^\mu[f/g] = \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\ln(f/g)). \quad (4.65)$$

Il est plus pratique de calculer la valeur du scalaire  $J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g]$  au point  $z = (x, p)$  dans le référentiel de Lorentz de 4-vitesse  $V(z)$ . Par définition, les composantes de  $V(z)$  dans ce référentiel sont  $(1, 0, 0, 0)$  et un calcul direct nous conduit à:

$$J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g] = -\frac{D}{p_0} \eta^{ij} q_i q_j \quad (4.66)$$

où  $q_i = p_i \mathcal{D}_0[f/g] - p_0^2 \mathcal{D}_i[f/g]$ . Ceci prouve que  $J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g]$  est non négative en tous points  $z$  de l'espace des phases étendu. L'intégrale (4.64) est donc non négative, ce qui démontre le théorème  $H$ .



## **Partie II**

### **Etude de quelques applications d'une théorie champ moyen pour la relativité générale**



# Chapitre 5

## Généralités

Supposons que l'on réalise des observations sur un certain espace-temps physique  $S$ . Les quantités caractéristiques de  $S$  varient sur différentes échelles. Les échelles accessibles aux observations sont appelées grandes échelles, les échelles qui sont inférieures à la résolution des observations sont appelées petites échelles. Un modèle réaliste des résultats de ces observations doit nécessairement tenir compte de la résolution finie, en proposant une description de l'évolution des quantités caractéristiques de  $S$  sur les grandes échelles seulement. Les grandeurs intervenant dans ce type de modèle sont des grandeurs moyennes, accessibles aux grandes échelles. Une façon de construire ces grandeurs moyennes consiste à moyenner les grandeurs 'réelles', qui varient à la fois sur les grandes et sur les petites échelles, sur toutes les valeurs possibles de leurs petites échelles de variations. Adopter une telle démarche dans le cadre de la relativité générale est toutefois loin d'être trivial, car les équations d'Einstein sont non linéaires; il s'avère cependant indispensable de disposer d'une description champ moyen de la relativité générale pour interpréter correctement les résultats des observations de plus en plus nombreuses et précises, qui sont réalisées en astrophysique des objets relativistes [59, 68, 39] et en cosmologie [9, 109, 57, 3, 79, 110]. Ainsi, l'élaboration d'une approche champ moyen de la gravitation relativiste est, depuis de nombreuses années, le sujet d'intenses recherches [64, 81, 64, 65, 115, 15, 16].

Les théories champ moyen de la gravitation relativiste proposées jusqu'en 2003 peuvent être regroupées en deux catégories. La première est représentée par [64, 81, 64, 65, 15, 16]. Ces travaux ont pour but d'élaborer les outils conceptuels permettant d'interpréter les modèles cosmologiques homogènes et isotropes comme des moyennes de modèles faiblement non homogènes ou non isotropes. Malheureusement, l'approche développée dans ces travaux n'est adaptée qu'à traiter des modèles cosmologiques presque homogènes et isotropes et ne peut pas être généralisée en une véritable théorie champ moyen de la relativité générale. La deuxième catégorie n'est, à notre connaissance, représentée que par [115].

A la différence des travaux précédents, R. Zalaletdinov y développe une réelle théorie champ moyen de la gravitation relativiste. Ce travail présente cependant une double difficulté. Le premier aspect de cette difficulté est que [115] assimile en effet, sans aucune justification physique, champ de gravitation et connexion; [115] représente donc le champ moyen par la moyenne des symboles de Christoffel. Ce parti-pris entraîne évidemment l'autre aspect de la difficulté, à savoir que la théorie champ moyen obtenue n'est généralement pas métrique et, en particulier, diffère de la relativité générale.

F. Debbasch a proposé en 2004 [43, 44] une théorie champ moyen qui résout les problèmes rencontrés par les deux approches précédentes. Cette théorie est en effet assez générale pour s'appliquer à des contextes plus vastes que celui de la cosmologie presque homogène et isotrope. Elle assure également que le champ moyen peut être décrit dans le cadre de la relativité générale. D'un point de vue pratique, cette théorie introduit des familles d'espace-temps 'fictifs' et remplace les moyennes sur les petites échelles dans le vrai espace-temps par des moyennes sur les différents espace-temps de la famille correspondante; le champ moyen est alors décrit par une métrique qui est la moyenne des métriques des différents espace-temps de la famille. Nous commencerons par exposer les principaux aspects de cette nouvelle théorie. Puis nous présenterons une première application simple: un ensemble d'espace-temps décrivant un trou noir de Schwarzschild observé avec une précision finie. Un deuxième exemple sera également développé: la construction d'un espace-temps moyen associé à un ensemble de trous noirs de Reisner-Nordström extrêmes.

# Chapitre 6

## Présentation de la théorie

Soit  $\mathcal{B}$  une variété de base [105, 51] à quatre dimensions, et soit  $\Omega$  un espace de probabilité. On introduit une famille  $\Sigma$  d'espace-temps définie par:

$$\Sigma = \{\mathcal{S}(\omega), \omega \in \Omega\}, \quad (6.1)$$

où  $\mathcal{S}(\omega)$  est un espace-temps physique constitué de la variété de base  $\mathcal{B}$  sur laquelle on introduit une métrique dépendant de  $\omega$ , notée  $g(\omega)$  et un 4-potential électromagnétique dépendant lui aussi de  $\omega$ , et noté  $A(\omega)$ :

$$\mathcal{S}(\omega) = \{\mathcal{B}, g(\omega), A(\omega)\}, \quad (6.2)$$

Chaque espace-temps  $\mathcal{S}(\omega)$  est muni de la connection de Levi-Civita  $\Gamma(\omega)$  associée à la métrique  $g(\omega)$ . La densité de courant associée à  $A(\omega)$  est notée  $j(\omega)$ . Dans chaque espace-temps  $\mathcal{S}(\omega)$ , la matière est décrite par un tenseur d'énergie-impulsion  $\mathcal{T}(\omega)$ , qui est relié à la métrique  $g(\omega)$  et à la connection  $\Gamma(\omega)$  par l'équation d'Einstein [113]. On écrit le tenseur  $\mathcal{T}(\omega)$  sous la forme suivante:

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{T}_{(A(\omega), g(\omega))} + \mathcal{T}_m(\omega), \quad (6.3)$$

où  $\mathcal{T}_{(A(\omega), g(\omega))}$  est le tenseur d'énergie-impulsion associé au 4-potential  $A(\omega)$  dans la métrique  $g(\omega)$ , et  $\mathcal{T}_m(\omega)$  représente le tenseur d'énergie-impulsion décrivant les champs de matière autres que le champ électromagnétique.

Il a été montré dans [43] que l'on peut associer à l'ensemble  $\Sigma$  un unique espace-temps moyen, noté  $\bar{\mathcal{S}}$ , et défini par:

$$\bar{\mathcal{S}} = (\mathcal{B}, \bar{g}, \bar{A}), \quad (6.4)$$

où la métrique  $\bar{g}$  et le 4-potential  $\bar{A}$  sont définis comme étant les moyennes respectives de  $g(\omega)$  et de  $A(\omega)$  sur  $\omega$ . On a, pour tout point  $P$  de la variété de base  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} \bar{g}(P) &= \langle g(P, \omega) \rangle \\ \bar{A}(P) &= \langle A(P, \omega) \rangle, \end{aligned} \quad (6.5)$$

où les crochets représentent une moyenne sur  $\omega$ . La métrique  $\bar{g}$  est appelée métrique moyenne et le 4-potentiel  $\bar{A}$  est appelé 4-potentiel moyen. On définit la connexion de l'espace-temps moyen comme étant la connexion de Levi-Civita de la métrique moyenne  $\bar{g}$ . Cette connexion est appelée connexion moyenne, et notée  $\bar{\Gamma}$ . Les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  de la connexion de Levi-Civita associés à une métrique  $g$  quelconque sont reliés de façon non-linéaire à cette métrique  $g$  [113]. Par conséquent, les coefficients de Christoffel  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$  de la connexion moyenne ne sont pas égaux à la moyenne des coefficients de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(\omega)$  sur  $\omega$ .

La métrique moyenne  $\bar{g}$  et sa connexion de Levi-Civita associée  $\bar{\Gamma}$  définissent un tenseur d'Einstein pour l'espace-temps moyen, noté  $\bar{\mathcal{E}}$ :

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\nabla(\bar{\Gamma}), \bar{g}). \quad (6.6)$$

Le tenseur  $\bar{\mathcal{E}}$  définit, par l'intermédiaire de l'équation d'Einstein, un tenseur d'énergie-impulsion  $\bar{\mathcal{T}}$  pour l'espace-temps moyen:

$$\bar{\mathcal{E}}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\alpha}\bar{g}_{\nu\beta}\bar{\mathcal{T}}^{\alpha\beta}. \quad (6.7)$$

Le tenseur  $\bar{\mathcal{T}}$  est appelé tenseur d'énergie-impulsion moyen. Comme l'équation d'Einstein est non-linéaire en la métrique et en le 4-potentiel, le tenseur  $\bar{\mathcal{T}}$  est généralement différent de  $\mathcal{T}_{(\bar{A}, \bar{g})} + \langle \mathcal{T}_m(\omega) \rangle$ . On introduit alors un nouveau tenseur, noté  $\Delta\mathcal{T}$  et défini par:

$$\Delta\mathcal{T} = \bar{\mathcal{T}} - \mathcal{T}_{(\bar{A}, \bar{g})} - \langle \mathcal{T}_m(\omega) \rangle. \quad (6.8)$$

Le tenseur  $\Delta\mathcal{T}$  peut être interprété comme le tenseur d'énergie-impulsion d'une matière apparente. Cette matière apparente décrit les effets cumulatifs des fluctuations à petites échelles du champ de gravitation et du champ électromagnétique non moyennés sur le comportement aux grandes échelles du champ gravitationnel moyen. En particulier, le fait que le tenseur  $\mathcal{T}(\omega)$  soit nul pour tout  $\omega$  n'implique pas que le tenseur  $\bar{\mathcal{T}}$  soit nul.

Soit  $\bar{F}$  le tenseur électromagnétique dérivant du 4-potentiel moyen  $\bar{A}$ ; le tenseur  $\bar{F}$  est relié à  $\bar{A}$  par la relation suivante:

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu, \quad (6.9)$$

ce qui correspond à la première équation de Maxwell dans la métrique moyenne  $\bar{g}$ :

$$\nabla_{[\alpha}(\bar{\Gamma})\bar{F}_{\mu\nu]} = 0. \quad (6.10)$$

Comme l'équation (6.9) est linéaire en le 4-potentiel et que  $\bar{A} = \langle A(\omega) \rangle$ , on a:  $\bar{F} = \langle F(\omega) \rangle$ , où  $F(\omega)$  est le tenseur électromagnétique dérivant de  $A(\omega)$ . On définit,



par la seconde équation de Maxwell pour le 4-potentiel  $\bar{A}$  dans la métrique  $\bar{g}$ , une densité de courant  $\bar{j}$  associée à  $\bar{A}$ :

$$\bar{g}^{\nu\alpha}\nabla_\alpha(\bar{\Gamma})\bar{F}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{j}^\nu. \quad (6.11)$$

Comme cette équation est non linéaire en la métrique et en le 4-potentiel, le courant moyen  $\bar{j}$  n'est pas égal à la moyenne de  $j(\omega)$  sur  $\omega$ . On introduit alors le champ de 4-vecteurs  $\Delta j$  défini par:

$$\Delta j = \bar{j} - \langle j(\omega) \rangle. \quad (6.12)$$

Cette différence  $\Delta j$ , de la même façon que  $\Delta\mathcal{T}$ , est une manifestation aux grandes échelles des fluctuations sur les petites échelles du champ de gravitation et du champ électromagnétique non moyennés. En particulier, une région de l'espace-temps dans laquelle on a initialement  $j(\omega) = 0$  pour tout  $\omega$  sera munie d'une densité de courant moyenne  $\bar{j}$  généralement non nulle.

Il est également important de mentionner que la procédure de moyenne que nous venons de présenter assure que les géodésiques du champ moyen peuvent être interprétées, au moins localement, comme des moyennes de 'vraies' géodésiques *i.e.* de géodésiques du champ non moyenné. On peut trouver une discussion détaillée de ce point dans [44].



# Chapitre 7

## Etude de deux applications de la théorie

### 7.1 Une première application: espace-temps moyen associé à un ensemble de trous noirs de Schwarzschild

#### 7.1.1 Définition de la famille d'espace-temps considérée et détermination de la métrique moyenne

La famille  $\Sigma$  d'espace-temps que nous considérons dans cette section décrit un trou noir de Schwarzschild de masse  $M$  observé avec une précision finie dans les trois coordonnées spatiales de Kerr-Schild <sup>1</sup> [47, 24]. Plus précisément, la famille  $\Sigma$  est définie de la façon suivante:

$$\Sigma = \{S(\omega), \omega \in \Omega\}, \quad (7.1)$$

où l'ensemble  $\Omega$  est la boule euclidienne à trois dimensions de rayon  $a$ :

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3; \omega^2 \leq a^2\}. \quad (7.2)$$

Les coordonnées de Kerr-Schild sont notées  $(t, \mathbf{r})$ , où  $\mathbf{r}$  représente les trois coordonnées spatiales  $(x, y, z)$ . Dans chaque espace-temps  $S(\omega)$ , la métrique  $g(\omega)$  est caractérisée par ses composantes dans le système de coordonnées de Kerr-Schild;

---

<sup>1</sup>Pour plus de détails sur le trou noir de Schwarzschild et les coordonnées de Kerr-Schild, le lecteur est invité à se reporter à [70, 113, 19].

ces composantes vérifient:

$$ds_\omega^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 - \frac{2M}{|\mathbf{r} - \omega|} \left[ dt^2 - \frac{2dt}{|\mathbf{r} - \omega|} d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \omega) + \frac{1}{(\mathbf{r} - \omega)^2} (d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \omega))^2 \right]. \quad (7.3)$$

On utilise les notations  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}^2$  pour indiquer le produit scalaire euclidien entre des éléments  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  appartenant à  $\mathbb{R}^3$ , et la notation  $u$  représente la norme euclidienne  $|\mathbf{u}| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$ . La mesure de probabilité sur  $\Omega$  est définie par sa densité  $p(\omega)$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $d^3\omega$ ; on choisit  $p(\omega)$  comme étant la densité uniforme sur la sphère:  $p(\omega) = 1/V_a$ , où  $V_a = 4\pi a^3/3$ .

Nous avons vu dans la section précédente que l'espace-temps moyen  $\bar{\mathcal{S}}$  associé à  $\Sigma$  est muni de la métrique moyenne  $\bar{g} = \langle g(\omega) \rangle$ . Une première expression, approchée, de la métrique  $\bar{g}$  avait été obtenue dans [47], sous la forme d'un développement valide au second ordre en  $a/r$ . Il s'est avéré qu'une expression exacte de  $\bar{g}$  peut être obtenue, avec l'aide de *Mathematica*, par exemple [24]. Lors de la détermination de cette expression exacte, nous avons été amenés à distinguer deux cas:  $r > a$  et  $r < a$ . Etudier la métrique moyenne pour  $r < a$  revient à construire un modèle moyen pour la région  $r < a$  du 'vrai' espace-temps. Or, le fait d'utiliser la théorie champ moyen pour décrire le 'vrai' espace-temps sur des échelles inférieures à l'échelle de moyennisation n'a *a priori* aucun sens physique. C'est pourquoi, dans toute la suite de ce travail, l'étude de l'espace-temps moyen  $\bar{\mathcal{S}}$  est restreinte au cas  $r > a$ . Les expressions exactes des composantes de Kerr-Schild de la métrique moyenne  $\bar{g}$  pour  $r > a$  sont données par:

$$\begin{aligned} \langle ds^2 \rangle = & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{2M}{r} - \frac{6a^2M}{5r^3}\right) \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}\right)^2 - \left(1 + \frac{2a^2M}{5r^3}\right) d\mathbf{r}^2 \\ & + \left[ -\frac{3M}{2r} - \frac{3Mr}{2a^2} + \frac{3M}{4a^3r^2} (a^2 - r^2)^2 \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right) \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} dt. \end{aligned} \quad (7.4)$$

### 7.1.2 L'espace-temps moyen décrit un trou noir

De la même façon que pour le trou noir de Schwarzschild non moyenné, nous avons défini des coordonnées de Schwarzschild  $(\tau, \rho, \zeta, \phi)$  pour l'espace-temps moyen. Les différentes étapes de calcul qui permettent de construire ces coordonnées à partir des coordonnées de Kerr-Schild sont données dans [24]. Retenons simplement ici que la coordonnée radiale  $\rho$  s'exprime en fonction de  $r$  de la façon suivante:

$$\rho(r) = r \sqrt{1 + \frac{2a^2M}{5r^3}}, \quad (7.5)$$

et que le temps  $\tau$  est défini par une relation du type:

$$dt = d\tau + \alpha(\rho) d\rho. \quad (7.6)$$

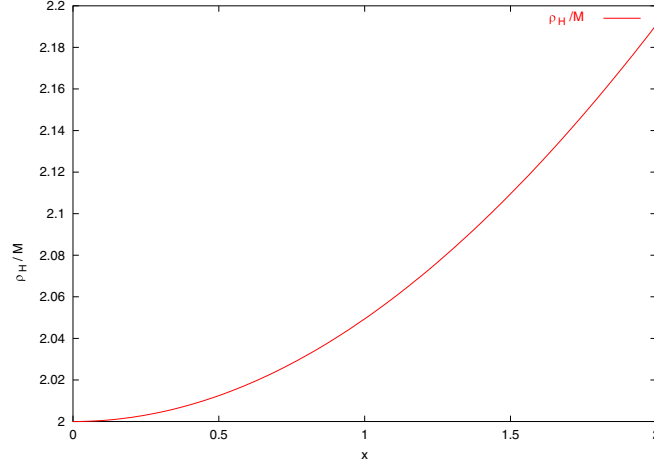


Figure 7.1: Evolution de  $\rho_H/M$  en fonction du paramètre de moyennisation adimensionné  $x = a/M$ .

Les composantes de la métrique moyenne  $\bar{g}$  dans les coordonnées de Schwarzschild s'écrivent sous la forme:

$$\langle ds^2 \rangle = F(\rho)d\tau^2 - G(\rho)d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2, \quad (7.7)$$

où  $d\Gamma^2 = d\zeta^2 + \sin^2 \zeta d\phi^2$ . Le lecteur intéressé peut trouver l'expression de la fonction  $\alpha$  intervenant dans (7.6), ainsi que les expressions des fonctions  $F$  et  $G$  présentes dans (7.7), dans [24]. Les coordonnées  $(\tau, \rho, \zeta, \phi)$  mettent ainsi en évidence le caractère statique et à symétrie sphérique de l'espace-temps moyen.

On peut montrer [24] que pour tout  $a < 2M$ , la première singularité de  $G$  que l'on rencontre lorsque l'on vient de l'infini dans l'espace  $(\rho, \zeta, \phi)$  se trouve en  $r = r_H = 2M$ , ce qui correspond, d'après (7.5), à

$$\rho_H = \rho(r_H) = 2M \sqrt{1 + \frac{a^2}{20M^2}}. \quad (7.8)$$

La fonction adimensionnée  $\rho_H/M$  est représentée en fonction du paramètre adimensionné  $a/M$  sur la figure 7.1. Cette singularité de  $G$  est aussi un zéro de  $F$ . Les composantes de la métrique  $\bar{g}$  dans les coordonnées de Kerr-Schild sont parfaitement régulières en  $r = r_H$ . Ainsi, la singularité  $\rho = \rho_H$  est une singularité des composantes de la métrique  $\bar{g}$  dans les coordonnées de Schwarzschild seulement. Lorsque  $a = 0$ , la singularité  $\rho_H$  est égale à  $2M$ , ce qui correspond au rayon de l'horizon du trou noir de Schwarzschild de masse  $M$  non moyenné. Afin de vérifier si la surface  $\rho = \rho_H$  constitue également un horizon pour l'espace-temps moyen  $\bar{\mathcal{S}}$ , nous allons étudier le comportement de  $\bar{\mathcal{S}}$  au voisinage de  $\rho = \rho_H^+$ . Pour

cela, on développe les composantes de Schwarzschild de la métrique moyenne au voisinage de  $\rho = \rho_H$ ; on obtient une expression de la forme:

$$\langle ds^2 \rangle = (\rho - \rho_H)F'(\rho_H)d\tau^2 - \frac{1}{(\rho - \rho_H)P'(\rho_H)}d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2, \quad (7.9)$$

où la fonction  $P$  est définie par:  $P = 1/G$ , et le prime représente la dérivée par rapport à  $\rho$ . Les expressions exactes de  $F'(\rho_H)$  et  $P'(\rho_H)$  ne sont pas reproduites ici, mais le lecteur peut les trouver dans [24]. On considère ensuite la classe de systèmes de coordonnées  $(T_K, X_K, \zeta, \phi)$  sur  $\mathcal{B}$ , qui vérifient, au voisinage de  $\rho = \rho_H^+$ :

$$\begin{aligned} X_K^2 - T_K^2 &= \frac{\rho}{\rho_H} - 1 \\ \ln\left(\frac{X_K + T_K}{X_K - T_K}\right) &= \tau \sqrt{F'(\rho_H)P'(\rho_H)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Par analogie avec le trou noir de Schwarzschild non moyenné, un quelconque des systèmes de coordonnées de cette classe est appelé système de coordonnées de Kruskal pour l'espace-temps moyen [70]. Les composantes de la métrique moyenne dans l'un quelconque de ces systèmes de coordonnées de Kruskal ont la forme suivante, au voisinage de  $\rho = \rho_H$ :

$$\langle ds^2 \rangle = \frac{4\rho_H}{P'(\rho_H)}(dT_K^2 - dX_K^2) - \rho^2(X_K, T_K)d\Gamma^2, \quad (7.11)$$

où, d'après la première équation de (7.10):  $\rho(X_K, T_K) = \rho_H + \rho_H(X_K^2 - T_K^2)$ . L'expression (7.11) met en évidence que les composantes de Kruskal de la métrique moyenne sont parfaitement régulières en  $\rho = \rho_H$ . Sous cette forme, la métrique  $\bar{g}$  peut donc être étendue à travers la surface  $\rho = \rho_H$  aux valeurs de  $\rho$  inférieures à  $\rho_H$ . D'après la première équation de (7.10), on peut constater que  $\rho = \rho_H$  correspond à  $X_K = \pm T_K$ . La surface  $\rho = \rho_H$  est donc formée par l'union des deux surfaces  $X_K = +T_K$  et  $X_K = -T_K$ . En outre, on peut voir, d'après la seconde équation de (7.10) que la coordonnée temporelle de Schwarzschild,  $\tau$ , est égale à  $\pm\infty$  sur cette surface  $\rho = \rho_H$ . On retrouve ainsi le fait que  $\rho_H$  est une singularité des coordonnées de Schwarzschild, introduite lors de la définition de  $\tau$ .

L'expression (7.7) des composantes de Schwarzschild de la métrique moyenne montre que l'espace-temps moyen admet le champ de vecteurs de Killing stationnaire  $\xi = \partial_\tau$ . On a ainsi:

$$\xi^\mu \xi_\mu = \bar{g}_{\tau\tau} = F. \quad (7.12)$$

On peut montrer que la fonction  $F$  est positive lorsque  $\rho$  est supérieure à  $\rho_H$ , et tend vers 1 lorsque  $\rho$  tend vers l'infini. Le champ de vecteurs de Killing  $\xi$  est

donc du genre temps dans la région de l'espace-temps moyen où  $\rho = \rho_H$ , et il est normé à 1 à l'infini. La singularité  $\rho_H$  est un zéro de  $F$ ; d'après (7.12), le champ de vecteurs de Killing  $\xi$  s'annule donc sur la surface  $\rho = \rho_H$ . Comme cette surface est formée des deux surfaces  $X_K = +T_K$  et  $X_K = -T_K$ , elle constitue un horizon de Killing bifurqué [114]. Pour tout  $a < 2M$ , l'espace-temps moyen décrit donc un trou noir d'horizon  $\rho = \rho_H$ .

Avant de poursuivre notre étude des propriétés de l'espace-temps moyen, commentons le cas où  $a$  est supérieur à  $2M$ . Puisque nous avons déterminé la métrique moyenne sous l'hypothèse  $r > a$ , la singularité de la fonction  $G$  en  $\rho = \rho_H$  ne peut être prise en considération que si  $r_H = 2M$  est supérieur à  $a$ . Ainsi, lorsque  $a > 2M$ , la singularité  $\rho_H$  devient non physique, et l'espace-temps moyen ne décrit plus un trou noir. Le cas  $a > 2M$  correspond à une configuration dans laquelle la résolution des observations devient supérieure à la taille caractéristique de l'objet observé. Il n'est pas évident d'interpréter de façon raisonnable physiquement les résultats d'observations réalisées dans ces conditions. Dans ce qui suit, on se placera donc toujours dans le cas où  $a < 2M$ .

### 7.1.3 Tenseur d'énergie-impulsion moyen

Dans cette section, nous présentons le tenseur d'énergie impulsion moyen  $\bar{\mathcal{T}}$  dans la région de l'espace-temps à l'extérieur de l'horizon du trou noir moyen. Cette région coïncide avec le domaine de l'espace-temps moyen couvert par les coordonnées de Schwarzschild. En outre, le tenseur  $\bar{\mathcal{T}}$  est diagonal dans ce système de coordonnées, et ses composantes non nulles s'expriment simplement à partir des composantes de Schwarzschild de la métrique moyenne et de leurs dérivées par rapport à  $\rho$  [86]. Nous avons donc naturellement choisi de calculer les composantes de  $\bar{\mathcal{T}}$  à l'extérieur de l'horizon dans les coordonnées de Schwarzschild. Nous avons obtenu les expressions exactes de ces composantes pour tout  $a < 2M$ . Ces expressions sont toutefois trop lourdes pour être reproduites ici. Nous donnons simplement leurs expressions approchées, valides au second ordre en  $a/\rho$ :

$$\begin{aligned} 8\pi \bar{\mathcal{T}}_0^0 &= -\frac{6a^2 M^2}{5\rho^6}; & 8\pi \bar{\mathcal{T}}_1^1 &= -\frac{6a^2 M^2}{5\rho^6}; \\ 8\pi \bar{\mathcal{T}}_2^2 &= \frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}; & 8\pi \bar{\mathcal{T}}_3^3 &= \frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ainsi, le trou noir moyen, contrairement au trou noir de Schwarzschild non moyenné, n'est pas une solution du vide des équations d'Einstein. Le tenseur  $\bar{\mathcal{T}}$  peut être vu comme le tenseur d'énergie-impulsion d'une matière apparente, qui entoure le trou noir moyen. La composante  $\bar{\mathcal{T}}_0^0$  représente la densité d'énergie  $\varepsilon$  de cette matière apparente, et pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $-\bar{\mathcal{T}}_i^i$  représente la pression  $p_i$  de

cette matière apparente dans la direction  $i$  [86]. La matière apparente est donc caractérisée par une densité d'énergie négative et par un tenseur de pression anisotrope. Notons que la pression radiale est l'opposé de la densité d'énergie. Sur la figure 7.2 est représentée l'expression exacte de la densité d'énergie  $\varepsilon$  en fonction de  $a/M$  et de  $r/M$ .

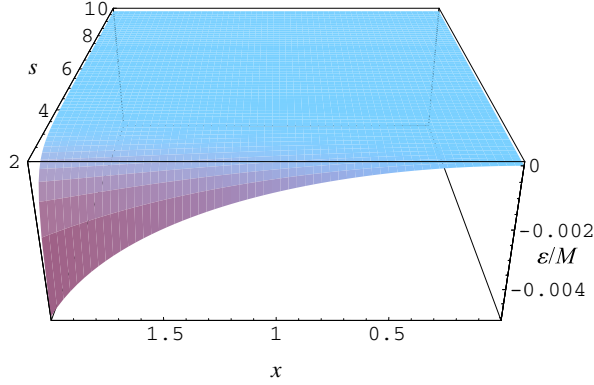


Figure 7.2: Evolution de la densité d'énergie adimensionnée  $\varepsilon/M$  en fonction de  $x = a/M$  et de  $s = r/M$ , pour  $s > x$ .

Nous avons étudié si le tenseur d'énergie-impulsion moyen satisfaisait les conditions sur l'énergie usuelles [70, 113]. Commençons par rappeler ces conditions. La condition faible est satisfaite si, pour tout vecteur du genre temps  $\chi$ :  $\bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}\chi^\mu\chi^\nu \geq 0$ . On peut montrer que toutes les conditions sur l'énergie (conditions faible, forte, et dominante) sont violées par ce tenseur d'énergie-impulsion moyen. La condition forte est remplie si  $(\bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{T}}\bar{g}_{\mu\nu})\chi^\mu\chi^\nu \geq 0$  pour tout vecteur  $\chi$  du genre temps. Enfin, la condition dominante est réalisée si le vecteur  $\bar{\mathcal{T}}^\nu_\mu\chi^\mu$  est du genre temps orienté vers le futur ou nul pour tout vecteur  $\chi$  du genre temps orienté vers le futur. La condition faible est automatiquement vérifiée si la condition dominante est vérifiée. Dans notre cas, le champ de vecteurs de Killing  $\xi = \partial_\tau$  est du genre temps orienté vers le futur à l'extérieur de l'horizon. Le champ de vecteurs de Killing  $\xi$  constitue donc un choix naturel pour  $\chi$  dans cette région de l'espace-temps. Les conditions faible, forte et dominante se réécrivent alors de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \varepsilon F(\rho) &\geq 0, \\ \frac{F(\rho)}{2} \left( \varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i \right) &\geq 0 \\ \varepsilon &\geq 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

La figure 7.3 représente l'expression exacte de  $\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i$  en fonction de  $a/M$  et de  $r/M$ , à  $M$  fixée. On peut voir sur les figures 7.2 et 7.3 qu'aucune de ces conditions



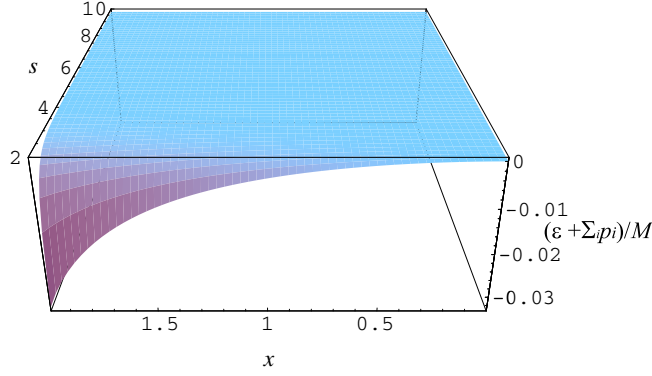


Figure 7.3: Evolution de la somme adimensionnée  $(\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i)/M$  en fonction de  $x = a/M$  et de  $s = r/M$ , pour  $s > x$ .

sur l'énergie n'est vérifiée par le tenseur d'énergie-impulsion moyen, et ce, pour tout  $r < a$ .

Finalement, en prenant la trace de l'équation d'Einstein, nous avons déterminé la courbure scalaire  $\bar{\mathcal{R}}$  de l'espace-temps moyen à partir des composantes de Schwarzschild de  $\tilde{\mathcal{T}}$ . De même que pour les composantes de Schwarzschild de  $\tilde{\mathcal{T}}$ , nous ne redonnons ici que l'expression approchée de  $\bar{\mathcal{R}}$ , valide au second ordre en  $a/\rho$ :

$$\bar{\mathcal{R}} = -\frac{12a^2M^2}{5\rho^6}. \quad (7.15)$$

L'expression exacte de la courbure scalaire  $\bar{\mathcal{R}}$  est représentée en fonction de  $a/M$  et de  $r/M$  sur la figure 7.4.

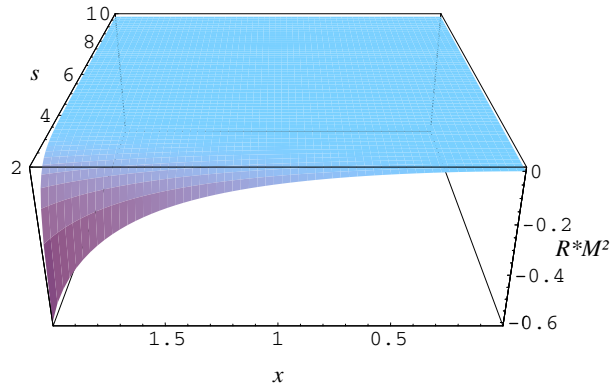


Figure 7.4: Evolution de la courbure scalaire adimensionnée  $\bar{\mathcal{R}} \times M^2$  de l'espace-temps moyen en fonction de  $x = a/M$  et de  $s = r/M$ , pour  $s > x$ .

On peut voir sur la figure 7.4 que la courbure scalaire est toujours négative.

Elle augmente avec  $r$ , et tend vers 0 lorsque  $r$  tend vers l'infini. Cette courbure scalaire, ainsi que la relation  $\varepsilon = -p_1$ , rappellent l'équation d'état de l'énergie noire nécessaire pour rendre compte de l'ensemble observations cosmologiques récentes [17, 72, 100, 57, 79, 110].

#### 7.1.4 Masse totale du trou noir moyen

Lorsque la coordonnée radiale  $\rho$  tend vers  $+\infty$ , les composantes de Schwarzschild de la métrique moyenne  $\bar{g}$  se réduisent à:

$$\langle ds^2 \rangle = d\tau^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2, \quad (7.16)$$

ce qui correspond à la métrique de Minkowski plate. L'espace-temps moyen est donc asymptotiquement plat, et admet une masse ADM, que nous noterons  $\bar{M}$ . La masse  $\bar{M}$  est donnée par une intégrale sur une surface à deux dimensions à symétrie sphérique située à l'infini spatial [113]. En utilisant le théorème de Stokes, on peut réécrire cette intégrale sous la forme d'une somme de deux intégrales. L'une de ces intégrales, que l'on appelle  $\bar{E}_{vol}$  est une intégrale de volume, calculée dans la région de l'espace-temps moyen extérieure à l'horizon, et qui fait intervenir le tenseur d'énergie-impulsion moyen; l'autre intégrale, appelée  $\bar{E}_{sur}$ , est une intégrale de surface, induite par la présence de cet horizon dans l'espace-temps moyen. De façon plus précise, la première intégrale est une intégrale sur une hypersurface à trois dimensions du genre espace, asymptotiquement plate, et dont l'intersection avec l'horizon est une 2-sphère contenue dans l'horizon. La seconde intégrale est calculée sur cette 2-sphère. On a ainsi:

$$\bar{M}(a, M) = \bar{E}_{vol}(a, M) + \bar{E}_{sur}(a, M). \quad (7.17)$$

Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous sur le cas de trou noir de Schwarzschild non moyenné. Le tenseur d'énergie-impulsion du trou noir de Schwarzschild non moyenné est nul; ceci entraîne que la contribution en volume  $E_{vol}$  est, elle aussi, nulle. Toute la masse est regroupée dans le terme de surface:  $E_{surf} = M$ . Revenons maintenant au cas du trou noir moyen. Nous avons calculé les deux termes  $\bar{E}_{vol}(a, M)$  et  $\bar{E}_{sur}(a, M)$  pour tout  $a < 2M$ , et obtenu:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{vol}(a, M) &= -f(a, M) \\ \bar{E}_{sur}(a, M) &= M + f(a, M). \end{aligned} \quad (7.18)$$

L'expression exacte de la fonction  $f$  ne présentant pas d'intérêt en elle-même, nous ne la donnons pas ici. Notons simplement que lorsque  $a$  s'annule,  $f$  s'annule aussi et on retrouve bien le cas du trou noir de Schwarzschild non moyenné. D'après la première équation de (7.18), la présence d'un tenseur d'énergie-impulsion non nul dans l'espace-temps moyen entraîne que le terme de volume,

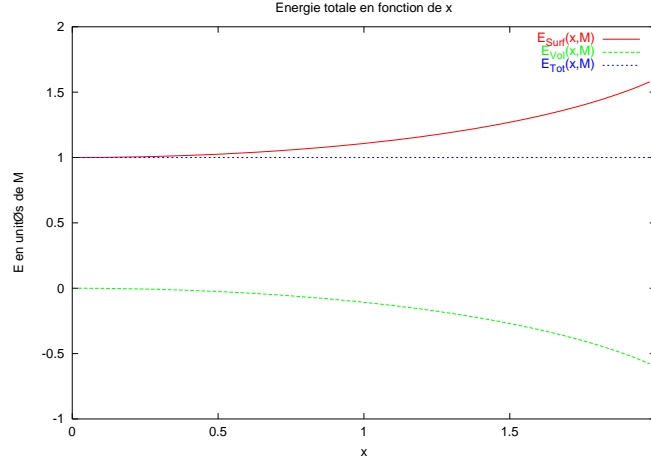


Figure 7.5: Evolution de  $\bar{E}_{vol}/M$  et de  $\bar{E}_{surf}/M$  en fonction du paramètre de moyennisation adimensionné  $x = a/M$ .

contrairement au cas du trou noir de Schwarzschild non moyenné, est non nul. Toutefois, le rayon de l'horizon est modifié par la procédure de moyenne; le terme de surface n'est donc plus égal à la masse totale  $M$  du trou noir de Schwarzschild dans le vide; la moyennisation introduit un terme supplémentaire. Ce terme supplémentaire compense, pour toute valeur de  $a$  inférieure à  $2M$ , la contribution provenant du terme de volume. La figure 7.5, qui représente l'évolution de  $\bar{E}_{vol}/M$ ,  $\bar{E}_{surf}/M$  et  $\bar{M}/M$  avec  $a/M$ , illustre ce phénomène de compensation. On a donc, pour tout  $a < 2M$ :

$$\bar{M} = M. \quad (7.19)$$

Ainsi, la procédure de moyenne modifie la répartition locale de l'énergie dans l'espace-temps, mais elle ne change pas la masse totale, mesurée à l'infini, de l'espace-temps. Dans la section 7.1.6, nous mettrons ce résultat en relation avec les observations de trous noirs astrophysiques.

### 7.1.5 Température du trou noir moyen

On peut déterminer les propriétés thermiques du trou noir de Schwarzschild non moyenné en étudiant la topologie de l'espace-temps de Schwarzschild euclidien [113]. Nous allons procéder de façon analogue ici pour calculer la température de l'espace-temps moyen.

L'espace-temps moyen euclidien est construit de la manière suivante. On introduit, dans la région de l'espace-temps moyen à l'extérieur de l'horizon, le temps imaginaire  $\psi$ , défini par:  $\psi = i\tau$  [113], ainsi qu'une nouvelle coordonnée radiale

$u$ , donnée par:

$$u(\rho) = 2 \sqrt{\frac{\rho - \rho_H}{P'(\rho_H)}}. \quad (7.20)$$

La fonction  $u$  tend vers  $0^+$  lorsque l'on s'approche de l'horizon. On peut réécrire l'expression (7.9) des composantes de Schwarzschild de  $\bar{g}$  au voisinage de  $\rho = \rho_H^+$  dans les coordonnées  $(\psi, u, \theta, \phi)$ :

$$\langle ds^2 \rangle = - \left[ u^2 d \left( \frac{\psi}{2 / \sqrt{F'(\rho_H) P'(\rho_H)}} \right)^2 + du^2 \right] - \rho^2(u) d\Gamma^2. \quad (7.21)$$

La métrique moyenne écrite sous cette forme décrit une variété riemannienne de topologie  $\mathbb{R}^2 \times S^2$ . L'expression (7.21) met en évidence que les coordonnées  $(\psi, u)$  jouent le rôle de coordonnées polaires pour le plan  $\mathbb{R}^2$ . La singularité apparente de la partie  $(\psi, u)$  de la métrique moyenne sur l'horizon, (c'est-à-dire en  $u = 0$ ), est clairement similaire à la singularité que présente la métrique euclidienne 2-D dans les coordonnées polaires à l'origine. Par conséquent, il est naturel de considérer l'espace-temps moyen euclidien comme périodique en  $\psi$ , de période

$$P_\psi = \frac{4\pi}{\sqrt{F'(\rho_H) P'(\rho_H)}}. \quad (7.22)$$

Cette périodicité en temps imaginaire est caractéristique d'une matrice densité thermique [60, 113, 69, 89] de température

$$\Theta = \frac{\hbar}{P_\psi} = \frac{\hbar}{4\pi} \sqrt{F'(\rho_H) P'(\rho_H)}. \quad (7.23)$$

Le lecteur peut trouver l'expression exacte de  $\Theta$  pour tout  $a < 2M$  dans [24]. L'évolution de  $\Theta$  en fonction de  $a/M$  est représentée sur la figure 7.6.

Nous donnons simplement ici, l'expression approchée de  $\Theta$ , valide au second ordre en  $a/M$ :

$$\Theta(a, M) = \frac{\hbar}{8\pi M} \left( 1 + \frac{a^2}{20M^2} \right). \quad (7.24)$$

Lorsque  $a = 0$ , on retrouve la température de Hawking pour le trou noir de Schwarzschild non moyenné:  $\Theta(0, M) = \hbar/8\pi M$ .

Ainsi, notre travail met en évidence que moyenner sur des degrés de liberté à petites échelles classiques du champ de gravitation, modifie la température de l'espace-temps, qui est une manifestation de degrés de liberté quantiques du champ de gravitation. Ce résultat important est approfondi dans le deuxième exemple d'application de la théorie champ moyen, qui est traité dans la section 7.2.

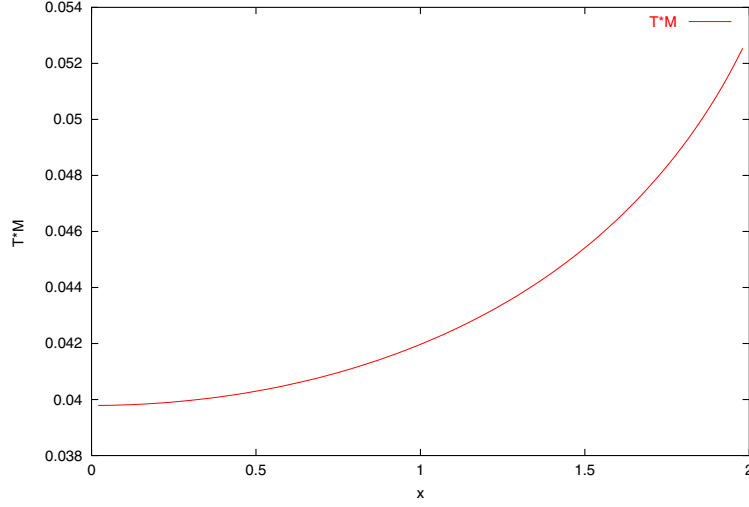


Figure 7.6: Evolution de la température adimensionnée  $\Theta \times M/\hbar$  avec  $x = a/M$ .

### 7.1.6 Observations de trous noirs astrophysiques

Dans cette section, nous mettons en relation les résultats que nous avons obtenus dans le cadre de notre modèle avec les résultats des observations actuelles et futures du candidat trou noir astrophysique le plus proche de nous, et donc le plus étudié: Sagittarius A\*.

Sagittarius A\* est localisé au centre de notre galaxie, c'est-à-dire à une distance  $D \simeq 8$  kpc du Soleil [106]. Des observations réalisées dans le domaine infrarouge ont permis d'étudier les trajectoires d'étoiles se trouvant dans le voisinage immédiat du centre galactique. Cette étude dynamique a conduit à une estimation de la masse du corps central de l'ordre de:  $M \simeq 4.10^6 M_\odot$  [67, 107]. L'échelle de longueur associée à cette masse est donnée par:

$$L_M = \frac{G M}{c^2} \simeq 3.10^{-5} \text{ pc}, \quad (7.25)$$

ce qui correspond à une distance angulaire de  $5 \mu\text{as}$ <sup>2</sup> à une distance de 8 kpc. Les étoiles qui ont été observées se situent à des distances du centre galactique de l'ordre de  $10^{-2}$  pc [59]; ce qui correspond à une distance angulaire de l'ordre de 250 mas à 8 kpc. La position d'une étoile par rapport au centre galactique est mesurée avec une résolution angulaire  $\delta$  de l'ordre de 2 mas. Voyons comment on peut interpréter ces résultats dans le cadre de notre modèle. La distance séparant une étoile en mouvement autour du centre galactique et le centre galactique peut être vue comme la distance spatiale  $r$  de notre modèle. La résolution spatiale  $\delta$  sur

<sup>2</sup>l'abréviation as représente arcseconde.

la mesure de cette distance peut être assimilée au paramètre  $a$ . Le rapport  $a/M$  de notre modèle s'exprime alors en fonction des quantités associées aux observations de la façon suivante:

$$\frac{a}{M} \equiv \frac{\delta D}{L_M}, \quad (7.26)$$

ce qui donne:

$$\frac{a}{M} \simeq \frac{2.10^{-3}}{5.10^{-6}} \simeq 400. \quad (7.27)$$

Comparons  $r$  et  $a$ . La distance angulaire à 8 kpc associée à  $r$  est généralement de l'ordre de 250 mas, et la résolution  $\delta$  est de l'ordre de 2 mas. Ainsi, on se trouve dans une situation où  $r \gg a$ . Cela signifie que les mouvements étudiés lors de ces observations sont des mouvements de particules test se trouvant à l'infini par rapport à Sagittarius A\*. La masse déduite de ces observations est donc une masse estimée à l'infini. Le résultat que nous avons obtenu dans notre modèle concernant la masse totale de l'espace-temps moyen conforte clairement le fait que cette estimation de la masse de Sagittarius A\* est correcte, et n'est pas entâchée d'un biais systématique dû à la résolution finie des observations, et ce quelque soit la résolution angulaire des observations. Ainsi, on peut considérer que la valeur  $4.10^6 M_\odot$  est une estimation réaliste de la masse de Sagittarius A\*, même si la résolution angulaire des observations qui ont conduit à ce résultat n'est pas bonne, d'un point de vue théorique.

Ces observations infrarouges du centre galactique n'offrent qu'un accès indirect aux paramètres caractéristiques de l'hypothétique trou noir central. Dans les années à venir, des observations à haute résolution angulaire, réalisées grâce au Very Large Base Interferometer (VLBI), devraient permettre de sonder directement les propriétés de Sagittarius A\*. On s'attend à ce que la résolution  $\delta'$  de l'imagerie du VLBI atteigne  $20 \mu\text{as}$  à une longueur d'onde de 1,3 mm [12, 49]. Nous avons vu plus haut que la distance angulaire caractéristique associée à la masse  $M = 4.10^6 M_\odot$  était de l'ordre de  $5 \mu\text{as}$ . Ainsi, la résolution angulaire  $\delta' = 20 \mu\text{as}$  correspond à deux rayons de Schwarzschild  $2M$  du trou noir non moyenné. En assimilant la résolution angulaire  $\delta'$  au paramètre  $a$  de notre modèle, on a:

$$\frac{a}{M} \equiv \frac{\delta' D}{M} \simeq 4. \quad (7.28)$$

Or, les modèles prédisent qu'un trou noir de Schwarzschild de masse  $M$  est entouré d'une ombre, dont la taille théorique  $R_O$  est de l'ordre de quelques rayons de l'horizon  $2M$  ( $R_O \simeq 5 \times 2M$ ) [95]. Une résolution du même ordre de grandeur que le rayon de Schwarzschild  $2M$  associé à la masse  $M$  de Sagittarius A\* devrait rendre possible la détection d'une 'ombre'; ce qui constituerait une preuve que Sagittarius A\* est un trou noir astrophysique. Une mesure de la taille de l'ombre permettrait de plus d'estimer la taille du rayon de l'horizon. Or, d'après

notre modèle, le rayon de l'horizon du trou noir de masse  $M$ , après moyennisation, n'est plus simplement égal à  $2M$ . Nous avons en effet montré dans la section 7.1.2 que le rayon  $\rho_H$  de l'horizon du trou noir moyenné dépendait à la fois de la masse  $M$  du trou noir initial mais aussi de la résolution  $a$  des observations. En particulier, puisque la résolution prévue pour ces observations induit un rapport  $a/M$  de l'ordre de 1, la différence entre le rayon  $\rho_H$  de l'horizon moyen et le rayon de Schwarzschild  $2M$ , et donc la différence entre la taille de l'ombre observée ( $\tilde{R}_O \simeq 5 \times \rho_H$ ) et la taille théorique ( $R_O \simeq 5 \times 2M$ ), ne devraient pas être négligeables. Notre modèle indique donc que contrairement à ce qui est attendu, la mesure de la taille apparente d'une ombre associée à Sagittarius A\* ne devrait pas fournir une estimation directe, non biaisée, de la masse de Sagittarius A\*.

Je terminerai la présentation de l'application de la théorie champ moyen à une famille de trous noirs de Schwarzschild par la remarque suivante. La moyennisation qui est présentée ici est réalisée dans les coordonnées de Kerr-Schild, la résolution finie portant sur la détermination des coordonnées de Kerr-Schild spatiales. Nous aurions pu considérer d'autres types de moyennisation, dans lesquels les coordonnées de Schwarzschild spatiales, ou bien les coordonnées de Kruskal spatiales seraient mesurées avec une résolution finie. L'espace-temps moyen obtenu à partir d'une procédure de moyenne appliquée aux composantes de la métrique dans un système de coordonnées autre que le système de coordonnées de Kerr-Schild, serait certainement différent de l'espace-temps moyen présenté ici, et en particulier, ne décrirait pas nécessairement un trou noir. Les coordonnées de Kruskal ont été retenues car elles présentent l'avantage par rapport aux coordonnées de Schwarzschild, d'être régulières sur l'horizon du trou noir. Par ailleurs, comme on se place du point de vue d'un observateur situé dans l'espace-temps de Schwarzschild, à l'extérieur à l'horizon, les coordonnées de Kruskal, qui couvrent toute la variété d'espace-temps étendue, ne présentent pas vraiment d'intérêt. Il serait particulièrement intéressant d'un point de vue pratique de considérer un système de coordonnées qui rende compte de façon réaliste de la façon dont les observations présentes et futures de trous noirs astrophysiques sont et seront réalisées.

## 7.2 Une deuxième application: espace-temps moyen associé à un ensemble de trous noirs extrêmes complexes

### 7.2.1 Motivation

Nous avons vu dans la section précédente, que le fait de moyenner sur des degrés de liberté classiques du champ de gravitation modifiait la température, qui est une manifestation macroscopique des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation. Ce résultat suggère l'existence de liens entre la procédure de moyenne et les degrés de liberté quantiques du champ de gravitation. Afin d'explorer davantage ces liens, nous nous sommes proposé de moyenner un espace-temps décrivant un trou noir extrême. En effet, les trous noirs extrêmes présentent la propriété thermodynamique intéressante d'avoir une température nulle. Moyenner un trou noir extrême permettrait donc de voir si la procédure de moyenne fait apparaître une température non nulle. Nous avons appliqué la procédure de moyenne utilisée pour le trou noir de Schwarzschild à un trou noir extrême et l'espace-temps moyen que nous avons obtenu ne décrivait plus un trou noir. Nous avons alors introduit une généralisation complexe de la procédure de moyenne présentée précédemment, et qui permet de transformer un trou noir extrême réel en un trou noir, toujours réel, mais de température non nulle [26].

La majorité des résultats présentés dans cette section a été obtenue de façon analogue au cas du trou noir de Schwarzschild moyenné. Par conséquent, nous ne redonnerons pas tous les raisonnements et étapes de calculs aboutissant à ces résultats. Le lecteur pourra se reporter à la section précédente pour plus de détails.

#### Définition de la famille d'espace-temps considérée et détermination de la métrique moyenne

On considère la famille  $\Sigma$  d'espace-temps définie par:

$$\Sigma = \{S(\omega), \omega \in \Omega\}, \quad (7.29)$$

où l'ensemble  $\Omega$  et la densité de probabilité  $p(\omega)$  sont les mêmes que dans la section 7.1.1. Chaque membre  $S(\omega)$  est un espace-temps complexe muni de la métrique  $g(\omega)$ , dont les composantes dans les coordonnées de Kerr-Schild  $(t, \mathbf{r})$  vérifient:

$$ds_\omega^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 - h_\omega(r) \left( dt - \frac{(\mathbf{r} - i\omega) \cdot d\mathbf{r}}{R(\mathbf{r}, \omega)} \right)^2, \quad (7.30)$$

avec

$$R(\mathbf{r}, \omega) = \left( r^2 - \omega^2 - 2i \mathbf{r} \cdot \omega \right)^{1/2}, \quad (7.31)$$



et

$$h_\omega(r) = 1 - \left(1 - \frac{M}{R(\mathbf{r}, \omega)}\right)^2. \quad (7.32)$$

La métrique correspondant à  $\omega = 0$  est la métrique du trou noir extrême en coordonnées de Kerr-Schild. La seule matière présente à l'extérieur de chaque espace-temps membre de  $\Sigma$  est un champ électromagnétique caractérisé par un 4-potentiell  $A(\omega)$ , dont les composantes dans les coordonnées de Kerr-Schild vérifient:

$$\begin{aligned} A_t(\omega) &= -\frac{M}{R} & A_x(\omega) &= \frac{M}{R^2} h_\omega(r) x \\ A_y(\omega) &= \frac{M}{R^2} h_\omega(r) y & A_z(\omega) &= \frac{M}{R^2} h_\omega(r) z. \end{aligned} \quad (7.33)$$

La densité de courant  $j(\omega)$  associée à chaque 4-potentiell  $A(\omega)$  est identiquement nulle. La masse totale de chaque espace-temps de  $\Sigma$  est  $M$ , et la charge totale est  $Q = M$ .

L'espace-temps moyen  $\bar{\mathcal{S}}$  associé à  $\Sigma$  est muni de la métrique moyenne  $\bar{g} = \langle g(\omega) \rangle$ . Nous avons déterminé de façon exacte les composantes de Kerr-Schild de cette métrique  $\bar{g}$  pour tout  $a < r$ . Ces expressions sont trop compliquées pour être présentées ici. Nous donnons simplement ici l'expression approchée de ces composantes lorsque  $a \ll r$ :

$$\begin{aligned} \langle ds^2 \rangle &= \left(1 + \frac{M^2}{r^2} - \frac{2M}{r} - \frac{a^2 M^2}{5r^4}\right) dt^2 + \left(-1 - \frac{a^2 M^2}{5r^4} + \frac{2a^2 M}{5r^3}\right) d\mathbf{r}^2 \\ &+ \left(\frac{M^2}{r^2} - \frac{2M}{r} + \frac{2a^2 M^2}{5r^4} - \frac{6a^2 M}{5r^3}\right) \left(\frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{4M}{r} - \frac{2M^2}{r^2} + \frac{4a^2 M}{5r^3}\right) \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r} dt. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Les composantes de Kerr-Schild de la métrique  $\bar{g}$  sont réelles si  $t$  et  $\mathbf{r}$  le sont. L'espace-temps moyen associé à  $\Sigma$  est donc réel.

### 7.2.2 L'espace-temps moyen décrit un trou noir réel

De la même manière que pour le trou noir de Schwarzschild moyen, nous avons introduit des coordonnées de Schwarzschild  $(\tilde{r}, \tilde{\rho}, \zeta, \phi)$  pour l'espace-temps moyen. L'expression approchée, valide au second ordre en  $a/r$  de la coordonnée  $\tilde{\rho}$  est donnée par:

$$\tilde{\rho} \simeq r \left(1 + \frac{a^2 M^2}{10r^4} - \frac{a^2 M}{5r^3}\right). \quad (7.35)$$

La coordonnée temporelle  $\tilde{\tau}$  est définie par une relation de la forme:

$$dt = d\tilde{\tau} + \tilde{\alpha}(\tilde{\rho})d\tilde{\rho}. \quad (7.36)$$

Les composantes de la métrique moyenne dans ces coordonnées sont données par:

$$\langle ds^2 \rangle = \tilde{F}(\tilde{\rho})d\tilde{\tau}^2 - \tilde{G}(\tilde{\rho})d\tilde{\rho}^2 - \tilde{\rho}^2 d\Gamma^2. \quad (7.37)$$

Cette expression met en évidence que l'espace-temps moyen est statique à symétrie sphérique; elle admet donc le vecteur de Killing stationnaire  $\xi = \partial_{\tilde{\tau}}$ , qui vérifie:

$$\xi^\mu \xi_\mu = \bar{g}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} = \tilde{F}. \quad (7.38)$$

La première singularité de  $\tilde{G}$  que l'on rencontre lorsque l'on vient de l'infini dans l'espace  $(\tilde{\rho}, \theta, \phi)$  se trouve en  $r = \tilde{r}_H$  où l'expression approchée de  $\tilde{r}_H$  au second ordre en  $a/M$  est donnée par:

$$\tilde{r}_H \simeq M \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{5}M} - \frac{a^2}{5M^2} \right), \quad (7.39)$$

ce qui, d'après (7.35), correspond à:

$$\tilde{\rho}_H(a, M) \simeq M \left( 1 + \frac{a}{\sqrt{5}M} - \frac{3a^2}{10M^2} \right). \quad (7.40)$$

Cette singularité de  $\tilde{G}$  est aussi un zéro de  $\tilde{F}$ . Notons que lorsque  $a = 0$ , on a  $\tilde{\rho}_H = M$ , ce qui correspond au rayon de l'horizon du trou noir extrême non moyenné. Le champ de vecteurs de Killing  $\xi$  est du genre-temps dans la région de l'espace-temps moyen où  $\tilde{\rho} > \tilde{\rho}_H$ ; il est normé à 1 à l'infini, et s'annule en  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_H$ . En étudiant la topologie de l'espace-temps moyen au voisinage de  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_H$ , nous avons mis en évidence que la surface  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_H$  est un horizon de Killing bifurqué. L'espace-temps moyen  $\tilde{S}$  décrit donc un trou noir réel d'horizon de rayon  $\tilde{\rho}_H$ .

### 7.2.3 Propriétés de la matière présente à l'extérieur du trou noir

**Tenseur d'énergie-impulsion moyen** Le tenseur d'énergie-impulsion moyen  $\tilde{\mathcal{T}}$  est naturellement caractérisé dans la région de l'espace-temps moyen à l'extérieur de l'horizon par ses composantes dans les coordonnées de Schwarzschild. Les expressions approchées de ces composantes, valides au second ordre en  $a/\tilde{\rho}$ , sont

données par:

$$\begin{aligned}
8\pi \bar{\mathcal{T}}_0^0 &= \frac{M^2}{\tilde{\rho}^4} - \frac{4M^3 a^2}{5\tilde{\rho}^7} \\
8\pi \bar{\mathcal{T}}_1^1 &= \frac{M^2}{\tilde{\rho}^4} + \frac{a^2}{\tilde{\rho}^2} \left( \frac{4M^2}{5\tilde{\rho}^4} - \frac{12M^3}{5\tilde{\rho}^5} + \frac{4M^4}{5\tilde{\rho}^6} \right) \\
8\pi \bar{\mathcal{T}}_2^2 &= -\frac{M^2}{\tilde{\rho}^4} + \frac{a^2}{\tilde{\rho}^2} \left( -\frac{8M^2}{5\tilde{\rho}^4} + \frac{32M^3}{5\tilde{\rho}^5} - \frac{14M^4}{5\tilde{\rho}^6} \right) \\
8\pi \bar{\mathcal{T}}_3^3 &= 8\pi \bar{\mathcal{T}}_2^2.
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Le tenseur  $\bar{\mathcal{T}}$  décrit la matière présente dans l'espace-temps moyen à l'extérieur du trou noir. Lorsque  $a = 0$ , les composantes de Schwarzschild de  $\bar{\mathcal{T}}$  se ramènent aux composantes du tenseur d'énergie-impulsion associé au champ électromagnétique du trou noir extrême non moyenné. La composante  $\bar{\mathcal{T}}_0^0$  peut être interprétée comme la densité d'énergie  $\varepsilon$  de cette matière, et, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $-\bar{\mathcal{T}}_i^i$  représente la pression  $p_i$  de cette matière dans la direction  $i$  [86]. La matière présente dans l'espace-temps moyen a donc une densité d'énergie positive.

Finalement, en prenant la trace de l'équation d'Einstein, on peut déduire des composantes de la courbure scalaire de l'espace-temps moyen; on obtient, au second ordre en  $a/\tilde{\rho}$ :

$$\bar{\mathcal{R}} = -\frac{\chi a^2}{8\pi \tilde{\rho}^2} \left( -\frac{12M^2}{5\tilde{\rho}^4} + \frac{48M^3}{5\tilde{\rho}^5} - \frac{24M^4}{5\tilde{\rho}^6} \right). \tag{7.42}$$

**Champ électromagnétique moyen** Le 4-potentiel moyen  $\bar{A}$  associé à l'ensemble  $\Sigma$  est donné par  $\bar{A} = \langle A(\omega) \rangle$ . Nous avons donc déterminé directement les composantes de Kerr-Schild de  $\bar{A}$  en moyennant sur  $\omega$  les composantes de Kerr-Schild de  $A(\omega)$ , données par (7.33). Nous avons ensuite effectué un changement de coordonnées sur ces composantes et obtenu les composantes de  $\bar{A}$  dans les coordonnées de Schwarzschild; ces composantes vérifient, au second ordre en  $a/\tilde{\rho}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{A}_\tau &= -\frac{M}{\tilde{\rho}} + \frac{a^2}{\tilde{\rho}^2} \left( \frac{M^2}{5\tilde{\rho}^2} - \frac{M^3}{10\tilde{\rho}^3} \right); & \bar{A}_\theta &= 0; \\
\bar{A}_\rho &= -\frac{2a^2 M^2 (M^3 - 4M^2 \tilde{\rho} + 5M \tilde{\rho}^2 - 4\tilde{\rho}^3)}{5(M - \tilde{\rho})^4 \tilde{\rho}^3}; & \bar{A}_\phi &= 0.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Le tenseur électromagnétique moyen  $\bar{F}$  associé à  $\bar{A}$  vérifie la relation

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu. \tag{7.44}$$

On déduit de (7.44) et de (7.43) que les seules composantes non nulles de  $\bar{F}$  dans les coordonnées de Schwarzschild sont  $\bar{F}_{\tilde{\tau}\tilde{\rho}} = -\bar{F}_{\tilde{\rho}\tilde{\tau}}$ . On a, au second ordre en  $a/\tilde{\rho}$ :

$$\bar{F}_{\tilde{\tau}\tilde{\rho}} = -\bar{F}_{\tilde{\rho}\tilde{\tau}} = -\frac{M}{\tilde{\rho}^2} + \frac{a^2}{\tilde{\rho}^2} \left( \frac{4M^2}{5\tilde{\rho}^3} - \frac{M^3}{2\tilde{\rho}^4} \right). \tag{7.45}$$

L'équation de Maxwell

$$\bar{g}^{\nu\alpha}\nabla_\alpha(\bar{\Gamma})\bar{F}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{J}^\nu \quad (7.46)$$

permet de déduire des composantes de Schwarzschild de  $\bar{F}$  les composantes de Schwarzschild du 4-courant  $\bar{j}$ . La seule composante non nulle est  $\bar{j}^0$ ; elle vérifie, au second ordre en  $a/\tilde{\rho}$ :

$$\bar{j}^0 \simeq \frac{a^2 M^3 (2 - 3\tilde{\rho}/M)}{5\pi\tilde{\rho}^7}, \quad (7.47)$$

La densité  $\bar{j}^0$  est une manifestation sur les grandes échelles des degrés de liberté du champ de gravitation et du champ électromagnétique qui ont été éliminés du champ électromagnétique moyen par la procédure de moyenne.

**Tenseur d'énergie-impulsion associé au champ électromagnétique moyen** Le tenseur d'énergie-impulsion  $\mathcal{T}_{\bar{A},\bar{g}}$  du 4-potential moyen dans la métrique moyenne est donné par [86]:

$$(\mathcal{T}_{\bar{A},\bar{g}})_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{F}_{\alpha\beta} \bar{F}^{\alpha\beta} - \bar{F}_{\mu\alpha} \bar{F}_\nu^\alpha \right). \quad (7.48)$$

Nous avons déduit de cette expression les composantes de Schwarzschild de  $\mathcal{T}_{\bar{A},\bar{g}}$ , puis nous avons déterminé les expressions approchées au second ordre en  $a/\tilde{\rho}$  des composantes de Schwarzschild du tenseur  $\Delta\bar{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{T}} - \mathcal{T}_{\bar{A},\bar{g}}$ :

$$\begin{aligned} 8\pi(\Delta\bar{\mathcal{T}})_0^0 &= a^2 \left( \frac{4M^3}{5\tilde{\rho}^7} - \frac{4M^4}{5\tilde{\rho}^8} \right); & 8\pi(\Delta\bar{\mathcal{T}})_1^1 &= a^2 \left( \frac{4M^2}{5\tilde{\rho}^6} - \frac{4M^3}{5\tilde{\rho}^7} \right); \\ 8\pi(\Delta\bar{\mathcal{T}})_2^2 &= a^2 \left( -\frac{8M^2}{5\tilde{\rho}^6} + \frac{24M^3}{5\tilde{\rho}^7} - \frac{2M^4}{\tilde{\rho}^8} \right); & 8\pi(\Delta\bar{\mathcal{T}})_3^3 &= 8\pi(\Delta\bar{\mathcal{T}})_2^2. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Ce tenseur  $\Delta\bar{\mathcal{T}}$  peut être interprété comme le tenseur d'énergie impulsion d'une matière apparente, qui représente sur les grandes échelles, les degrés de liberté microscopiques du champ gravitationnel et du champ électromagnétique qui ont été éliminés du champ gravitationnel moyen par la procédure de moyenne. La composante  $\Delta\bar{\mathcal{T}}_0^0$  peut être interprétée comme la densité d'énergie  $\varepsilon$  de la matière apparente, et, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $-\Delta\bar{\mathcal{T}}_i^i$  représente la pression  $p_i$  de cette matière dans la direction  $i$ . Discutons des signes de  $\varepsilon$  et des  $p_i$ . Les composantes de Schwarzschild du tenseur  $\Delta\bar{\mathcal{T}}$  sont calculées dans la région de l'espace-temps moyen à l'extérieur de l'horizon, c'est-à-dire dans la région telle que  $\tilde{\rho} > \tilde{\rho}_H$ . D'après l'équation (7.40), on a  $\tilde{\rho}_H > M$ , ce qui implique que  $\tilde{\rho} > M$ . La densité d'énergie  $\varepsilon$  de la matière apparente est donc positive. La pression radiale  $p_1$  est négative et les pressions angulaires  $p_2$  et  $p_3$  sont positives. On peut remarquer que nous obtenons pour les quantités caractéristiques de cette matière

apparente des signes opposés à ceux des quantités caractéristiques de la matière apparente associée au trou noir de Schwarzschild observé avec une précision finie. On peut relier ces résultats aux observations cosmologiques récentes. En effet, les analyses des courbes de lumière des supernovae de type Ia [101, 3] ainsi que l'étude des anisotropies du fond diffus cosmologique [72, 57, 79, 110] indiquent une accélération de l'expansion de l'univers. Cette accélération est attribuée à la présence d'une constante cosmologique non nulle. Dans les modèles actuels, on décrit cette constante cosmologique comme une densité d'énergie noire, ou densité d'énergie du vide, de signe positif [17, 100]. Le résultat présenté ci-dessus confirme qu'il peut être intéressant d'examiner si une partie au moins de cette densité d'énergie du vide n'est pas une manifestation des degrés de liberté microscopiques du champ de gravitation.

#### 7.2.4 Propriétés thermodynamiques de l'espace-temps moyen

**Masse totale et charge totale** Une inspection directe de la métrique moyenne révèle que l'espace-temps moyen est asymptotiquement plat; l'équation (7.47) montre de plus que cet espace-temps ne porte pas de charge à l'infini. On peut donc lui attribuer une masse totale et une charge totale [113].

La masse ADM totale  $\bar{M}$  de l'espace-temps moyen est donnée par une intégrale sur une surface à deux dimensions, du genre espace, à symétrie sphérique, située à l'infini spatial. Nous avons obtenu:

$$\bar{M} = M. \quad (7.50)$$

La charge totale  $\bar{Q}$  de l'espace-temps moyen est elle aussi donnée par une intégrale sur une surface à deux dimensions du genre espace, à symétrie sphérique, situé à l'infini spatial; nous avons trouvé:

$$\bar{Q} = Q. \quad (7.51)$$

La procédure de moyenne modifie donc la distribution de l'énergie et la distribution de la densité de courant dans l'espace-temps non moyenné, mais ne change pas la masse et la charge totales de cet espace-temps.

**Température du trou noir moyen** Nous avons déterminé une température  $\Theta$  associée au trou noir moyen en étudiant la topologie de l'espace-temps euclidien associé à la région de l'espace-temps moyen située à l'extérieur de l'horizon. Cette température est non nulle, et elle vérifie, au second ordre en  $a/M$ :

$$\Theta(a, M) = \frac{\hbar a}{2\sqrt{5}\pi M^2} - \frac{\hbar a^2}{5\pi M^3}. \quad (7.52)$$

Ainsi, le fait de moyenner les degrés de liberté classiques d'un ensemble d'espace-temps complexes transforme un trou noir extrême, de température nulle, en un trou noir réel, de température non nulle.

## Conclusion et Perspectives

Je présente dans cette conclusion un bilan de mon travail de thèse, ainsi que les perspectives dans lesquelles ce travail pourrait être étendu. J'ai consacré un premier volet de mon travail de thèse à l'étude de quelques phénomènes de diffusions dans des géométries non triviales. Dans un premier temps, F. Debbasch et moi-même avons étudié les aspects phénoménologiques de mouvements browniens galiléens sur des surfaces dont la géométrie varie spatialement et temporellement sur plusieurs échelles. Ce travail a été motivé par l'importance du rôle des phénomènes de diffusion en biologie, notamment des phénomènes de diffusions latérales de molécules sur des membranes cellulaires [14, 96]. Une membrane cellulaire peut être décrite, en première approximation, comme une surface dont la 'vraie' géométrie présente des irrégularités de faible amplitude autour d'une géométrie moyenne, les échelles de variation spatiales et temporelles de ces irrégularités étant petites devant des échelles de référence  $L$  et  $T$ ; ces échelles peuvent par exemple être associées à la résolution finie de certaines observations de la diffusion, mais elles ne le sont pas nécessairement. Dans les modèles usuels, les phénomènes de diffusion sont décrits dans la géométrie moyenne seulement et les effets des irrégularités de la géométrie sont négligés. Nous avons cherché à savoir s'il était raisonnable de négliger ces effets. Nous avons pour cela développé des outils qui permettent de comparer des mouvements browniens dans différentes géométries. Nous avons considéré le cas général de géométries dépendant du temps, et nous avons étendu la définition du mouvement brownien usuel sur une variété riemannienne au cas où la géométrie de la variété dépend du temps. Nous avons utilisé ces outils dans le cas particulier d'une surface presque plane, c'est-à-dire une surface dont la 'vraie' géométrie présente, à des échelles très petites devant  $L$  et  $T$ , des irrégularités de faible amplitude autour de la géométrie du plan. Nous avons comparé de façon perturbative un mouvement brownien dans la 'vraie' géométrie à un mouvement brownien sur le plan. Les calculs perturbatifs que nous avons réalisés indiquent que, quelle que soit l'échelle à laquelle la surface presque plane est observée, un mouvement brownien sur cette surface diffère d'un mouvement brownien usuel sur le plan, et que l'écart entre ces deux mouvements croît exponentiellement avec le temps.

Cette croissance exponentielle rend l'analyse perturbative non valide au bout d'un certain temps caractéristique. Un prolongement nécessaire du travail présenté ici serait donc d'étendre notre étude des effets des irrégularités géométriques sur les diffusions browniennes à un cadre non perturbatif, et ce de façon numérique, par exemple. Cela devrait être réalisé d'abord sur des géométries presque planes, puis des géométries presque sphériques ou ellipsoïdales, et ce pour différentes amplitudes des irrégularités. Je souhaiterais aussi étendre notre travail au processus galiléen d'Ornstein-Uhlenbeck. Une étude préliminaire montre que l'influence des irrégularités sur ce type de diffusion est encore bien plus riche et complexe que dans le cas du mouvement brownien. Il convient de remarquer que l'utilisation d'un processus du type Ornstein-Uhlenbeck est indispensable, même en physique galiléenne, si l'on veut étudier l'influence d'irrégularités géométriques sur la thermalisation d'une particule diffusante avec le fluide qui l'entoure.

Bien sûr, l'étape ultérieure consistera à étendre, notamment dans le contexte cosmologique, l'étude galiléenne aux processus relativistes considérés dans cette thèse. Une étape encore plus lointaine sera de développer des processus quantiques relativistes, généralisation des processus quantiques galiléens à base d'opérateur de Lindblad [112, 66], et de modéliser ainsi l'influence de fluctuations quantiques sur des diffusions dans l'univers primordial.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à des processus stochastiques relativistes. Nous avons tout d'abord construit une classe d'extensions du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste dans un espace-temps de Friedmann-Robertson-Walker spatialement plat. Cet espace-temps homogène et isotrope est en effet considéré comme un modèle réaliste de l'univers sur les échelles cosmologiques [9, 109, 110]. Les diffusions d'éléments dans l'univers semblent être des phénomènes importants à considérer lors de l'estimation des abondances primordiales et leur étude pourrait notamment permettre de mieux connaître les mécanismes de formations des structures dans l'univers primordial [93]. Nous avons donc développé un modèle simple de diffusion dans un univers homogène et isotrope. Chaque processus de la classe est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé qui décrit la diffusion d'une particule relativiste dans le fluide cosmologique; le couplage des équations d'Einstein à l'équation d'état de ce fluide impose que la température de ce fluide dépend du temps comobile  $t$ . L'action du fluide sur la particule est représentée par deux coefficients, un coefficient de frottement fluide et un coefficient de bruit. Ces deux coefficients dépendent, comme l'état thermodynamique du fluide cosmologique, du temps  $t$ . Chacun de ces processus admet la distribution de Jüttner à la température  $\Theta(t)$  comme distribution dans l'espace des phases de la particule qui diffuse à condition que (i) les deux coefficients caractérisant le processus dépendent de l'énergie de la particule diffusante dans le référentiel comobile et (ii) que ces deux coefficients vérifient une certaine équation différentielle faisant intervenir la température  $\Theta(t)$  et le fac-



teur d'expansion de l'univers. Cette équation différentielle est une relation de fluctuation-dissipation dans un univers homogène et isotrope. Nous avons intégré de façon exacte cette équation et obtenu ainsi une relation de fluctuation-dissipation sous forme intégrale. Ces relations de fluctuation-dissipation traduisent le fait que la particule, sous l'effet de la diffusion dans le fluide, peut se thermaliser localement à la température dépendant du temps du fluide.

D'autre part, nous avons développé une approche unifiée des deux autres processus stochastiques relativistes proposés dans la littérature *i.e.* le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste, le processus de Franchi-Le Jan et le processus de Dunkel-Hänggi. Pour cela, nous avons construit une nouvelle classe de processus stochastiques relativistes à laquelle appartiennent aussi bien le ROUP que le processus de FLJ et le processus de DH. Les processus de la classe sont des processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisés. La force qui agit sur la particule qui diffuse est donc constituée de deux contributions différentes: une force déterministe et une force stochastique. La classe que nous avons construite est caractérisée par la propriété suivante: pour chaque processus de cette classe et chaque point de la trajectoire de la particule dans l'espace de phases, il existe un référentiel inertiel, dépendant du processus et du point, dans lequel la force stochastique est un bruit blanc gaussien isotrope. Chaque processus de la classe est individualisé en choisissant ce référentiel inertiel en chaque point de la trajectoire et la force déterministe. Nous avons obtenu les équations différentielles stochastiques et l'équation de transport  $3 + 1$  pour chaque processus de la classe dans un référentiel inertiel quelconque; nous avons également établi une équation de transport manifestement covariante pour tous les processus de la classe. Nous avons finalement utilisé cette formulation manifestement covariante pour démontrer un nouveau théorème  $H$ , valable pour l'ensemble des processus de la classe. Comme je l'ai déjà mentionné dans l'introduction, la partie conceptuelle du travail présenté ici, qui concerne la définition de la classe, est valable en espace-temps courbe comme en espace-temps plat. Par-contre, tous les calculs présentés dans cette thèse, comme la dérivation des équations différentielles stochastiques et de l'équation de transport  $3 + 1$ , ainsi que la dérivation de l'équation de transport manifestement covariante, n'ont jusqu'à présent été effectués qu'en espace-temps plat. L'étape suivante naturelle est donc d'étendre tous ces calculs présentés ici en espace-temps courbe, à partir par exemple, de l'utilisation de tétrades.

D'autre part, une application astrophysique particulièrement importante de la théorie des processus stochastiques relativistes présentée dans ma thèse est la diffusion d'éléments dans des étoiles. La diffusion dans une étoile est fortement influencée par les gradients de température et de pressions partielles des différents constituants [5, 2, 18, 111]. Il n'existait pas lorsque j'ai commencé ma thèse de modèle stochastique prenant ces effets en compte. Les seuls modèles disponibles étaient des modèles purement macroscopiques (dit hydrodynamiques) et

des modèles fondés sur l'équation de Boltzmann. J'ai construit récemment avec F. Debbasch et J.P. Rivet un processus galiléen simple du type Ornstein-Uhlenbeck permettant une modélisation de la thermodiffusion (encore appelée "effet Ludwig-Sorret"). Nous avons écrit une lettre qui est actuellement soumise [35]; le texte est reproduit en fin de ce manuscrit. Je souhaiterais évidemment appliquer cette construction pour modéliser de manière stochastique les phénomènes de diffusion galiléens dans les étoiles, puis étendre mon travail au cas relativiste. Je signalerai qu'il est maintenant prouvé que les modèles purement macroscopiques de thermodiffusion [88] ne peuvent décrire les situations relativistes de manières cohérentes [41]. Ces situations ne peuvent être décrites que par des modèles statistiques.

Une autre direction consiste à réexaminer les problèmes que je viens d'évoquer, et ceux déjà traités dans cette thèse, à l'aide d'autres modèles de transport, par exemple l'équation de Boltzmann [20, 87] déjà mentionnée dans ce mémoire. On pourrait ainsi comparer comment les deux approches modélisent les diffusions de particules relativistes; mais l'équation de Boltzmann permet également de modéliser le transport d'impulsion et d'énergie dans un fluide. Un autre problème ouvert lié à l'équation de Boltzmann en espace-temps courbe est la dérivation de cette équation à partir de la limite non quantique de la théorie quantique des champs [40].

Dans le second volet de ma thèse, j'ai travaillé sur deux exemples d'application de la théorie champ moyen de la relativité générale introduite par F. Debbasch. Dans le premier exemple, la procédure de moyenne introduite par F. Debbasch a été appliquée à une famille de trous noirs de Schwarzschild. Nous avons fait des calculs exacts pour étudier les propriétés de l'espace-temps moyen ainsi obtenu. Cet espace-temps moyen décrit un trou noir entouré d'une matière apparente, qui représente les degrés de liberté microscopiques du champ de gravitation qui ont été lissés par la procédure de moyenne. Cette matière apparente est caractérisée par une densité d'énergie négative et un tenseur de pression anisotrope, la pression radiale étant opposée à la densité d'énergie. Cette matière induit une courbure scalaire négative dans l'espace-temps. Ce résultat n'est donc pas sans rappeler les observations cosmologiques récentes d'une accélération de l'expansion de l'univers [9, 72, 109, 3, 79, 91, 110]. En effet, dans les modèles cosmologiques actuels, cette accélération est attribuée à l'existence d'une constante cosmologique non nulle, qui induit une courbure scalaire négative [17, 100]. Notons toutefois que la masse ADM totale de l'espace-temps moyen est identique à celle du trou noir de Schwarzschild. Nous avons également calculé une température pour le trou noir moyen. Cette température est différente de celle du trou noir de Schwarzschild non moyenné. Or la température d'un trou noir représente la répartition des degrés de liberté du champ de gravitation quantique dans l'espace des états de celui-ci. Le résultat que nous avons obtenu indique donc que la procédure de moyenne a un

effet sur le comptage des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation. Il convient de noter qu'il est également possible d'associer une entropie totale à l'espace-temps de Schwarzschild moyenné décrit ci-dessus. L'utilisation de la formule de Bekenstein-Hawking [114, 71] reliant l'entropie de l'horizon du trou au rayon de cet horizon permet alors de déduire une entropie pour la matière apparente entourant l'horizon. Je n'ai pas reproduit ici ces calculs car la méthode que nous avons utilisée ne se généralise pas aisément au cas du trou noir de Reisner-Nordström extrême. Je tenais cependant à mentionner ce point et j'espère pouvoir le développer dans des travaux ultérieurs.

Pour étudier davantage les imbrications entre la procédure de moyenne classique et la répartition des degrés de liberté quantiques du champ de gravitation, nous avons cherché à savoir si, en moyennant un trou noir de température nulle, on pouvait obtenir un trou noir de température finie, non nulle. Dans ce but, nous avons considéré une généralisation complexe de la procédure de moyenne appliquée à une famille de trous noirs de Schwarzschild. Nous avons appliqué cette procédure de moyenne à une famille de trous noirs de Reisner-Nordström extrêmes complexes. L'espace-temps moyen que nous avons ainsi obtenu décrit un trou noir réel de température finie non nulle. Comme plus haut, ce trou noir est entouré d'une matière apparente, mais la densité d'énergie associée est cette fois-ci positive, et les pressions négatives; la pression radiale est toujours opposée à la densité d'énergie. Signalons enfin que la matière apparente porte ici aussi une charge, de même signe que la charge du trou noir de Reissner-Nordström non moyenné. Cela dit, la charge totale et la masse ADM de l'espace-temps moyen sont identiques à celles du trou noir extrême non moyenné.

Nous avons vu que la théorie champ moyen de la relativité générale introduite en 2004 prédit de manière générale qu'une moyennisation de l'espace-temps engendrera une matière apparente prenant en compte les degrés lissés du champ de gravitation. Cet effet, qui a été mis en évidence sur des moyennisations particulières des trous noirs de Schwarzschild et de Reisner-Norström extrême, pourrait être responsable d'au moins une partie de l'énergie noire actuellement introduite dans tous les modèles réalistes de cosmologie. L'idée que les inhomogénéités du champ de gravitation pourraient être à l'origine de cette énergie a été discutée par plusieurs auteurs, mais dans un contexte théorique peu convaincant. En particulier, les arguments présentés dans [83] se fondent tous sur une analyse d'équations linéarisées, alors que l'effet prédit par la théorie champ moyen développée par F. Debbasch en 2004 est un effet non linéaire. Déterminer si cet effet peut ou non rendre compte d'une partie de l'énergie noire nécessitera probablement le recours à de lourdes simulations numériques.

D'une manière générale, il convient maintenant d'appliquer la théorie champ moyen de 2004 au plus grand nombre possible de solutions exactes ou numériques des équations d'Einstein, en moyennant ces solutions sur des degrés de libertés

aussi bien réels que complexes. En particulier, les applications de cette théorie que j'ai présentées ici doivent en premier lieu être étendues à l'ensemble des trous noirs de Kerr-Newmann [113, 19]. Doivent aussi être approfondis tous les aspects thermodynamiques des espace-temps moyens, ce qui implique notamment la détermination systématique de l'entropie à attribuer à la matière apparente entourant les trous noirs moyennés. Nous avons commencé à travailler dans cette direction et il semble que la manière dont une moyennisation donnée influence les différents trous noirs de la famille puisse se comprendre très simplement en termes de théorie des bifurcations. D'autres études pourraient concerner des solutions à plusieurs trous noirs ou des bains d'ondes gravitationnels. Il serait aussi intéressant d'appliquer la moyennisation complexe introduite pour la famille de trous noirs de Reisner-Nordström extrêmes à la famille de trous noirs de Schwarzschild.

D'un point de vue astrophysique pratique, il semble dès maintenant important de construire des familles de trous noirs permettant une modélisation réaliste des observations futures (10 ans) de Sgr A\*. D'un point de vue théorique, comprendre pourquoi une moyennisation classique d'un trou noir classique, solution exacte des équations d'Einstein, influence la température apparente de ce trou noir, apparaît aujourd'hui comme un défi majeur. Il serait notamment intéressant de développer une interprétation des résultats que nous avons obtenus en termes de gravitation quantique [82].

# Bibliographie

- [1] S. Abarbanel and A. Ditzkowski. Asymptotically stable fourth-order accurate schemes for the diffusion equation on complex shapes. *J. Comput. Phys.*, 133:279, 1996.
- [2] G. Alecian. Time-dependent diffusion in A-stars. *arXiv:astro-ph/9805040v1*, 1998.
- [3] L. Amendola et al. Slns data are consistent with acceleration at  $z=3$ . *Phys. Rev. D*, 74:127302, 2006.
- [4] J. Angst and J. Franchi. Central limit theorem for a class of relativistic diffusions. *J. Math. Phys.*, 48(8), 2007.
- [5] J. Babel and G. Michaud. A crucial test of the diffusion model - 53 Camelopardalis. *Astrophys. J.*, 366:560, 1991.
- [6] R. Balescu. *Statistical Dynamics: matter out of equilibrium*. Imperial College Press, 1997.
- [7] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. Covariant Kolmogorov equation and entropy current for the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *Eur. Phys. J. B*, 23:487, 2001.
- [8] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame. *Eur. Phys. J. B*, 19:37, 2001.
- [9] C.L. Bennett et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:1, 2003.
- [10] J. Bernstein. *Kinetic theory in the expanding universe*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

- [11] J. Boussinesq. Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides. *J. Math. Pures et Appliquées (Paris)*, 13(2):377–424, 1868.
- [12] G. Bower et al. Detection of the intrinsic size of sagittarius a\* through closure amplitude imaging. *Science*, 304(5671):704–708, 2004.
- [13] J. Braga, J. M. P. Desterro, and M. Carmo-Fonseca. Intracellular macromolecular mobility measured by fluorescence recovery after photobleaching with confocal laser scanning microscopes. *Mol. Bio. Cell*, 15:4749–4760, 2004.
- [14] A. Brünger, R. Peters, and K. Schulten. Continuous fluorescence microphotolysis to observe lateral diffusion in membranes: theoretical methods and applications. *J. Chem. Phys.*, 82:2147, 1984.
- [15] T. Buchert. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 32:105–26, 2000.
- [16] T. Buchert. On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 33:1381–405, 2001.
- [17] S.M. Carroll. The cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4:1, 2001.
- [18] B. Chaboyer et al. Heavy element diffusion in metal poor stars. *Astrophys. J.*, 562:521.
- [19] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black-Holes*. Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [20] S. Chapman and T.G. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [21] N.A. Chernikov. The relativistic gas in the gravitational field. *Acta Phys. Pol.*, 23, 1963.
- [22] N.A. Chernikov. Equilibrium distribution of the relativistic gas. *Acta Phys. Pol.*, 26, 1964.
- [23] N.A. Chernikov. Microscopic foundation of relativistic hydrodynamics. *Acta Phys. Pol.*, 27, 1964.
- [24] C. Chevalier, M. Bustamante, and F. Debbasch. Thermal statistical ensembles of black holes. *Phys. A*, 376:293–307, 2007.

- [25] C. Chevalier and F. Debbasch. Is brownian motion sensitive to geometry fluctuations? *Submitted to J. Stat. Phys.*
- [26] C. Chevalier and F. Debbasch. Is matter an emergent property of space-time? *Submitted for publication to the Proceedings of the International Conference on Complex Systems, Boston, 2007.*
- [27] C. Chevalier and F. Debbasch. Relativistic diffusions: a unifying approach. *Submitted to J. Math. Phys.*
- [28] C. Chevalier and F. Debbasch. Diffusion processes on manifolds. In *Submitted for publication to the proceedings of the Kurtzfest, Madison, USA, 2006.*, 2006.
- [29] C. Chevalier and F. Debbasch. Finite precision observations of schwarzschild black holes. In J.M. Alimi, editor, *Einstein Symposium, Unesco, Paris 2005*, 2006.
- [30] C. Chevalier and F. Debbasch. Mean field theory for einstein gravity and black holes thermodynamics. In F. Combes and R. Robert, editors, *Statistical Mechanics of non-extensive systems, Paris 2005*, 2006.
- [31] C. Chevalier and F. Debbasch. Relativistic transport and fluctuation-dissipation theorems. In M. Ishizuka, editor, *17th International Symposium on Transport Phenomena, Toyama, Japan, 2006*, 2006.
- [32] C. Chevalier and F. Debbasch. Fluctuation-dissipation theorems in an expanding universe. *J. Math. Phys.*, 48:023304, 2007.
- [33] C. Chevalier and F. Debbasch. Multi-scale diffusion on an interface. *Eur. Phys. Lett.*, 77:20005–20009, 2007.
- [34] C. Chevalier and F. Debbasch. A unifying approach to relativistic diffusions and H-theorems. *Accepted for publication in Mod. Phys. Lett. B*, 2007.
- [35] C. Chevalier, F. Debbasch, and J.P. Rivet. A stochastic approach to thermo-diffusion. *Submitted to Eur. Phys. Lett.*
- [36] M. Christensen. How to simulate anisotropic diffusion processes on curved surfaces. *J. Comput. Phys.*, 201:421–435, 2004.
- [37] L. Chuzhoy. Helium preenrichment in the first stars. *arXiv:astro-ph/0602593v2*, 2006.

- [38] S.M. Croom et al. The 2df qso redshift survey – xiv. structure and evolution from the two-point correlation function. *Astrophys. J. Suppl.*, 356(2):415–438, 2005.
- [39] G. De Francesco et al. Measuring supermassive black holes with gas kinematics: the active s0 galaxy ngc 3998. *Astronomy and Astrophysics*, 460(2):439–448, 2006.
- [40] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen, and C.G. van Weert. *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [41] F. Debbasch. *Contributions à l’hydrodynamique et à la physique statistique relativistes. Thèse d’habilitation à diriger des recherches*. Université Paris 6, 2001.
- [42] F. Debbasch. A diffusion process in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 45(7), 2004.
- [43] F. Debbasch. What is a mean gravitational field? *Eur. Phys. J. B*, 37(2):257–270, 2004.
- [44] F. Debbasch. Mean field theory and geodesics in general relativity. *Eur. Phys. J. B*, 43(1):143–154, 2005.
- [45] F. Debbasch and C. Chevalier. Relativistic stochastic processes: a review. In O. Descalzi, O.A. Rosso, and H.A. Larrondo, editors, *Proceedings of Medyfinol 2006, Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, Mar del Plata, Argentina, Dec. 4-8 2006’.*, volume 913 of *A.I.P. Conference Proceedings*, Melville, NY, 2007. American Institute of Physics.
- [46] F. Debbasch, K. Mallick, and J.P. Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Stat. Phys.*, 88:945, 1997.
- [47] F. Debbasch and Y. Ollivier. Observing a Schwarzschild black-hole with finite precision. *Astron. Astrophys.*, 433(2):397–404, 2005.
- [48] F. Debbasch, J.P. Rivet, and W.A. van Leeuwen. Invariance of the relativistic one-particle distribution function. *Physica A*, 301:181, 2001.
- [49] S. Doeleman and G. Bower. Approaching the event horizon through VLBI imaging of Sagittarius A\*. *GCNews*, 18:6–12, 2004.



- [50] F. Dowker, J. Henson, and R.F. Sorkin. Quantum gravity phenomenology, Lorentz invariance and discreteness. *Mod. Phys. Lett. A*, 19:1829–1840, 2004.
- [51] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, and A.T. Fomenko. *Modern geometry - Methods and applications*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [52] R.M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Arkiv f. Mat.*, 6(14):241–268, 1965.
- [53] J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of relativistic Brownian motion: the (1 + 1)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 71:016124, 2005.
- [54] J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of relativistic Brownian motion: the (1 + 3)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 72:036106, 2005.
- [55] J. Ehlers. General relativity and kinetic theory. In *Proceedings of the Varenna Summer School on Relativistic Astrophysics*, New-York, 1971. Academic Press.
- [56] A. Einstein. *Investigations on the Theory of Brownian Motion*. Reprint of the 1st english edition (1926), 1956. Dover, New-York.
- [57] D.J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys. J.*, 633:560.
- [58] M. Emery. *Stochastic calculus in manifolds*. Springer-Verlag, 1989.
- [59] H. Falcke and F.W. Hehl, editors. *The Galactic Black Hole.*, High energy physics, cosmology and gravitation. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003.
- [60] R.P. Feynman. *Statistical Mechanics*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley Company, 1972.
- [61] J. Franchi. Relativistic diffusion in Gödel’s universe. *arXiv math.PR/0612020*, 2006.
- [62] J. Franchi and Y. Le Jan. Relativistic diffusions and Schwarzschild geometry. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(2):187–251, 2007.
- [63] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [64] T. Futamase. A new description for a realistic inhomogeneous universe in general relativity. *Prog. Theor. Phys.*, 86:389–99, 1991.

- [65] T. Futamase. Averaging of a locally inhomogeneous realistic universe. *Phys. Rev. D*, 53:681–9, 1996.
- [66] C.W. Gardiner and P. Zoller. *Quantum Noise*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd enlarged edition, 2000.
- [67] A.M. Ghez et al. Full three dimensional orbits for multiple stars on close approaches to the central supermassive black hole. *Astron. Nachr. Suppl.*, 324(1):527–533, 2003.
- [68] A.M. Ghez et al. Variable infrared emission from the supermassive black hole at the center of the milky way. *Astrophys. J.*, 601, 2004.
- [69] R. Haag. *Local Quantum Physics*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [70] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [71] S.W. Hawking and R. Penrose. *The nature of space and time*. Princeton University Press, 1996.
- [72] G. Hinshaw et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Angular power spectrum. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:135, 2003.
- [73] G.T. Horowitz. Quantum states of black holes. In R.M. Wald, editor, *Black Holes and relativistic Stars*. The University of Chicago Press, 1998.
- [74] K. Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1987.
- [75] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland Mathematical Library, 2 edition.
- [76] W. Israel. Covariant fluid mechanics and thermodynamics: An introduction. In A. Anile and Y. Choquet-Bruhat, editors, *Relativistic Fluid Dynamics*, volume 1385 of *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, 1987. Springer-Verlag.
- [77] K. Itô. On stochastic differential equations on a differentiable manifold i. *Nagoya Math. J.*, 1:35–47, 1950.

- [78] K. Itô. On stochastic differential equations on a differentiable manifold ii. *MK*, 28:82–85, 1953.
- [79] W.C. Jones et al. A measurement of the angular power spectrum of the CMB temperature anisotropy from the 2003 flight of BOOMERANG. *Astrophys. J.*, 647:823, 2006.
- [80] F. Jüttner. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 34:856, 1911.
- [81] M. Kasai. Construction of Inhomogeneous universes which are Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker on average. *Phys. Rev. D*, 69:2330–2, 1992.
- [82] C. Kiefer. *Quantum gravity*. 2 edition.
- [83] E.W. Kolb, S. Matarrese, and A. Riotto. On cosmic acceleration without dark energy. *New J. Phys.*, 8:322, 2006.
- [84] E.W. Kolb and M.S. Turner. *The Early Universe*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990.
- [85] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press, London, 1959.
- [86] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, Oxford, 4th edition, 1975.
- [87] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Physical Kinetics*. Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [88] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [89] M. Le Bellac. *Thermal field theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1996.
- [90] M.C. Mackey. *Time's Arrow: the Origins of Thermodynamic Behavior*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [91] C. J. MacTavish et al. Cosmological parameters from the 2003 flight of BOOMERANG. *Astrophys. J.*, 647:799, 2006.
- [92] H.P. McKean. *Stochastic integrals*. Academic Press, New York and London, 1969.

- [93] D. Medvigy and A. Loeb. Element diffusion during cosmological structure formation. *arXiv:astro-ph/0110014v1*, 2001.
- [94] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, New-York, 1973.
- [95] M. Miyoshi. An approach detecting the horizon of Sgr A\*. *Proceedings of the 7th European VLBI Network Symposium (Toledo) 2004*, 2004.
- [96] S. Nehls et al. Dynamics and retention of misfolded proteins in native membranes. *Nat. Cell. Bio.*, 2:288–295, 2000.
- [97] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 5th edition, 1998.
- [98] G.C. Papanicolaou. Diffusion in random media. In J.B. Keller, D.W. McLaughlin, and G.C. Papanicolaou, editors, *Surveys in applied mathematics vol. I*, Lecture Notes in Mathematics, page 205, New York, 1995. Plenum Press.
- [99] P.J.E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [100] P.J.E. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 559:606, 2003.
- [101] C.J. Pritchett. SNLS - the supernova legacy survey. *Observing dark energy (NOAO/Tucson Proceedings)*, 2004.
- [102] F. Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill, Auckland, 1965.
- [103] M. Rigotti and F. Debbasch. A H-theorem for the Relativistic-Ornstein-Uhlenbeck process in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 46:103303, 2005.
- [104] I. F. Sbalzarini, A. Hayer, A. Helenius, and P. Koumoutsakos. Simulations of (an)isotropic diffusion on curved biological interfaces. *Biophysical J*, 90(3):878–885, 2006.
- [105] B. Schutz. *Geometrical Methods of mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [106] R. Schödel et al. A geometric determination of the distance to the galactic center. *ApJ*, 597:L121–L124, 2003.

- [107] R. Schödel et al. Stellar dynamics in the central arcsecond of our galaxy. *ApJ*, 596(2):1015–1034, 2003.
- [108] E.L. Schücking and E.A. Spiegel. Thermodynamics and cosmology. *Comments Ap. and Space Phys.*, 2:121, 1970.
- [109] D.N. Spergel et al. First Year Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:175, 2003.
- [110] D.N. Spergel et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Observations: Implications for cosmology. *Astrophys. J. Suppl.*, 170:377, 2007.
- [111] S. Turcotte. Diffusion and settling in Ap/Bp stars. 2003.
- [112] N.G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [113] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [114] R.M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. The University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [115] R. Zalaletdinov. Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein’s equation in cosmology. *Bull. Astron. Soc. India*, 25:401–416, 1997.



# Annexe 1: Publications dans des revues à comité de lecture

Dans cette annexe se trouvent les articles et les lettres qui ont été acceptés ou publiés, ainsi que des articles et une lettre actuellement soumis.

- C. Chevalier and F. Debbasch: Multi-scale diffusion on an interface. *Eur. Phys. Lett.*, 77:20005–20009, 2007 ([33]). Cette lettre est une première présentation rapide des résultats concernant les effets des irrégularités de la géométrie sur des mouvements browniens galiléens, dans le cas particulier d’une géométrie plane, sans cadre général.
- C. Chevalier and F. Debbasch: Is Brownian motion sensitive to geometry fluctuations? *Submitted to J. Stat. Phys.* ([25]). Dans cet article, nous présentons de façon complète et détaillée notre travail sur les effets des irrégularités de la géométrie sur des mouvements browniens galiléens.

Les références [33] et [25] correspondent au chapitre 1 de ce mémoire.

- C. Chevalier and F. Debbasch: Fluctuation-Dissipation Theorems in an Expanding Universe. *J. Math. Phys.*, 48:023304, 2007 ([32]). Cet article expose notre travail sur la construction d’un modèle de diffusion dans un univers en expansion. Il correspond au chapitre 3 du mémoire.
- C. Chevalier and F. Debbasch: Relativistic diffusions: a unifying approach. *Submitted to J. Math. Phys.* ([27]). Cet article présente l’approche unifiée des processus stochastiques relativistes existant dans la littérature. Nous y exposons de façon complète et détaillée les concepts ainsi que les différentes étapes de calculs.
- C. Chevalier and F. Debbasch: A unifying approach to relativistic diffusions and H-theorems. *Accepted for publication in Mod. Phys. Lett. B* ([34]). Cette lettre contient les résultats présentés dans [27], sans les démonstrations, ainsi qu’un nouveau théorème  $H$ .

L’article [27] et la lettre [34] correspondent au chapitre 4 de ce manuscrit.

- C. Chevalier, M. Bustamante and F. Debbasch. Thermal Statistical Ensembles of Black Holes. *Phys. A*, 376:293-307, 2007 ([24]). Cet article présente le travail que nous avons réalisé sur la famille de trous noirs de Schwarzschild. Il correspond à la section 7.1 de ce mémoire.
- C. Chevalier, F. Debbasch and J.P. Rivet: A stochastic approach to thermodiffusion. *Submitted to Eur. Phys. Lett.* ([35]). Dans cette lettre, nous présentons des modèles stochastiques de thermodiffusion galiléenne.



C. Chevalier and F. Debbasch: Multi-scale diffusion on an interface. *Eur. Phys. Lett.*, 77:20005–20009, 2007 ([33]).

# Multi-scale diffusion on an interface

C. CHEVALIER and F. DEBBASCH

*ERGA-LERMA, Université Paris 6, UMR 8112 - 3 rue Galilée, 94200 Ivry, France*

received 26 June 2006; accepted in final form 20 November 2006  
published online 17 January 2007

PACS 02.40.Ky – Riemannian geometries  
PACS 05.10.Gg – Stochastic analysis methods (Fokker-Planck, Langevin, etc.)  
PACS 05.40.Jc – Brownian motion

**Abstract** – We investigate how small scale metric fluctuations on a 2D interface influence large scale lateral diffusion. We find that the effect of these fluctuations can be cumulative and grow exponentially with time; we also estimate the typical time after which the predictions of a model that ignores the small scale fluctuations substantially differ from the predictions of a more realistic model, which takes those fluctuations into account.

Copyright © EPLA, 2007

**Introduction.** – Robert Brown first described in 1828 [1,2] the random motion that now carries his name. However, a proper physical understanding of the phenomenon remained elusive till 1905, when Einstein wrote his now famous seminal article [3] on Brownian motion. This article is considered today as marking the birth of modern stochastic process theory, which is now a full grown branch of Mathematics with applications ranging from Physics and Chemistry to Biology and Economics [4–7]. As far as Physics is concerned, what originated with the observation of 3-D diffusions of pollen grains immersed in water has thus become a comprehensive tool with which to model all sorts of diffusions, from random motions in relativistic 4D space-times [8] to lateral diffusions on 2D interfaces [6,9–12]. In practice, the geometry of a real, physical 2D interface is not known with infinite precision, but is typically accessible to observations on sufficiently large temporal and spatial scales only. Standard diffusion models take into account the observable, large scale aspects of the interface geometry, but fail to consider the small scale fluctuations of the real geometry [12,13]. This approximation is warranted if these fluctuations do not influence diffusions on large scales. This is however far from trivially true and the problem does not seem to have been addressed in the literature yet. The aim of the present letter is to provide a first investigation of this issue, focusing on Brownian motions. We start by developing the tools necessary to extract the large scale aspects of Brownian motions defined on surfaces with geometries fluctuating at small scales. We then apply these tools to study Brownian motions on nearly flat interfaces. Our main conclusion is that the large scale

aspects of Brownian motions are influenced by small scale fluctuations in the geometry and that these fluctuations therefore cannot be neglected if one wants to construct realistic models of diffusions on 2D interfaces.

**Technical statement of the problem.** – To study lateral diffusions on a 2D interface  $\Sigma$ , one usually starts by modeling  $\Sigma$  by a smooth surface  $S$  and diffusions on the interface are then conveniently modeled by diffusion processes on  $S$ . A smooth surface  $S$  is best defined as the couple formed by a so-called base manifold  $B$  and a Riemannian metric  $g$  defined on  $B$ . The choice of  $S = (B, g)$  susceptible of being used in modeling experimental results pertaining to diffusion phenomena on a given  $\Sigma$  is however generally not unique. Suppose, for the sake of simplicity, that we fix the base manifold  $B$  and introduce a coordinate system  $x = (x^1, x^2)$  on it. In practice, the geometry of the interface  $\Sigma$  cannot be probed at all scales, but only at scales greater than a certain scale  $L$  in the  $x$  coordinates; it follows that any two metrics  $g_0$  and  $g_0 + \delta g$  differing by a term  $\delta g$  which only varies at scales smaller than  $L$  can be used to construct two different but *a priori* equally valid models of the interface  $\Sigma$ . The same remark also applies if the characteristic time scales fixing the time dependence of  $\delta g$  are not accessible to observation.

Let  $S_0 = (B, g_0)$ ,  $S_0 + \delta S = (B, g_0 + \delta g)$  and let us focus on the simplest processes that can be defined on these surfaces, *i.e.* Brownian motions. Using these processes as models of lateral diffusions on  $\Sigma$  only makes sense if a Brownian motion on  $S_0$  cannot be distinguished from a Brownian motion on  $S_0 + \delta S$  on scales larger than  $L$ . This last assertion is however far from trivial and we do not

know of any published article on the topic. As stated in the introduction, the aim of this letter is to propose a first investigation of this open problem.

**Diffusion model.** – There is a standard way to define Brownian motion on a manifold  $B$  endowed with a time-independent Riemannian metric  $g$  [6,14]; the probability density  $n(t, x)$  associated with the process satisfies:

$$\partial_t n = \chi \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \partial_i \left( \sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \partial_j n \right), \quad (1)$$

where  $\chi$  is the diffusion coefficient,  $\partial_i$  stands for  $\partial/\partial x^i$ ,  $i = 1, 2$ , and  $g^{ij}$  (respectively  $g_{ij}$ ) denote the contravariant (respectively covariant) components of the metric  $g$  in the coordinate system  $x = (x^1, x^2)$ . Equation (1) ensures that  $n$  is normalized to unity at all time with respect to the standard surface element  $\sqrt{\det g_{ij}} d^2x$  associated with  $g$ . Suppose for simplicity purposes that  $B$  can be mapped by a single coordinate system  $x$  with  $(x^1, x^2) \in P \subset \mathbb{R}^2$ . The normalization of  $n$  then reads:

$$\int_P n \sqrt{\det g_{ij}} d^2x = 1. \quad (2)$$

If  $g$  is time-dependent, eq. (1) violates (2) and then cannot be used as transport equation. The simplest generalization of (1) which does not violate (2) is

$$\partial_t \left( \sqrt{\det g_{ij}} n \right) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \partial_j n \right). \quad (3)$$

This equation will be retained as diffusion model for the remainder of the letter. It is convenient for later purposes to introduce the density  $N(t, x)$  of the process with respect to the  $g$ -independent Lebesgue measure  $d^2x$ :

$$N(t, x) = n(t, x) \sqrt{\det g_{ij}}, \quad (4)$$

which obeys the equation

$$\partial_t N = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \partial_j \left( \frac{N}{\sqrt{\det g_{ij}}} \right) \right). \quad (5)$$

The normalization condition on  $N$  reads:

$$\int_P N(t, x) d^2x = 1. \quad (6)$$

### Choice of geometry.

*Nearly flat metrics and their polarizations.* As far as geometry is concerned, the simplest possible scenario corresponds to situations where  $S$  is nearly flat at all times and positions. We thus choose  $B = \mathbb{R}^2$  and consider metrics of the form  $g^{ij}(t, x) = \eta^{ij} + \varepsilon h^{ij}(t, x)$ , where  $h^{ij}(t, x)$  is a time- and space-dependent perturbation of the flat metric  $\eta^{ij} = \text{diag}(1, 1)$ , and  $\varepsilon \ll 1$  fixes the amplitude of this perturbation. A general perturbation  $h^{ij}(t, x)$  is the linear superposition of three different polarizations. The first polarization is defined by  $h^{11} = h^{22}$

and  $h^{12} = h^{21} = 0$ , the second one by  $h^{11} = -h^{22}$  and  $h^{12} = h^{21} = 0$ , and the third one by  $h^{11} = h^{22} = 0$  and  $h^{12} = h^{21}$ . A detailed study shows that the influences of these three different polarizations on diffusion processes are qualitatively similar. This letter will therefore present results pertaining to the first polarization only.

*Form of the metric perturbation around the plane.* Let  $h(t, x) = h^{11}(t, x) = h^{22}(t, x)$ . Computations are greatly simplified if this function is chosen as a simple linear superposition of eigenvectors of the linear operator  $\partial_t$  and  $\Delta$  appearing in the unperturbed diffusion equation  $\partial_t n = \chi \Delta n$  on the plane. We therefore choose  $h(t, x) = \sum_{nn'} A_{nn'} \cos(\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{x} + \Omega_{n'} t + \phi_{nn'})$ , without further specifying  $(n, n')$  at this stage. In particular, we allow both indices to have a discrete as well as a continuous range, the preceding sum being then understood as an integral.

We impose that all wave numbers  $|\mathbf{K}_n|$  are superior to a certain  $K^*$  and that all frequencies  $\Omega_{n'}$  are superior to a certain  $\Omega^*$ . This makes it possible to define unambiguously the large spatial scales as those associated to a wave number much smaller than  $K^*$  and the large temporal scales as those associated to a characteristic time scale much smaller than  $\Omega^*$ .

**How to compare Brownian motions in nearly flat 2D metrics with Brownian motions on the plane.** – The large scale behavior of a field defined on  $B = \mathbb{R}^2$  can be isolated by averaging this field over the small space and time scales. Let us focus on the metric  $g$ . Averaging  $g$  can be done in two, strictly equivalent ways. The first one consists in fixing the phases  $\phi_{nn'}$  and in averaging  $g$  over  $t$  and  $x$ . The other method consists in fixing  $t$  and  $x$  and in averaging  $g$  over all possible values of the unobservable phases  $\phi_{nn'}$ . This method is more computationally convenient and can be implemented in a completely clear manner by replacing the single, “real” metric  $g$  by a statistical ensemble of metric  $g(\omega)$  defined on  $\mathcal{B}$ . We thus introduce a real parameter  $\omega \in [0, 2\pi[$  and define a statistical ensemble of metrics  $g(\omega)$  by

$$g^{ij}(t, x, \omega) = \eta^{ij} + \varepsilon h^{ij}(t, x, \omega), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h^{11}(t, x, \omega) &= h^{22}(t, x, \omega) = h(t, x, \omega), \\ h^{12}(t, x, \omega) &= h^{21}(t, x, \omega) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$h(t, x, \omega) = \sum_{nn'} A_{nn'} \cos(\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{x} + \Omega_{n'} t + \phi_{nn'} + \omega), \quad (9)$$

for all values of  $t, x$  and  $\omega^1$ , the phases  $\phi_{nn'}$  being now considered as fixed real numbers.

Averages over  $\omega$  will be designated by angular brackets. One thus has, for example,  $\bar{g}(t, x) = \langle g(t, x, \omega) \rangle = \eta$ , so that the average metric  $\bar{g}$  is simply the flat metric  $\eta$ .

We now proceed by assimilating all small scale averagings to statistical averagings over  $\omega$ . In particular, pick

<sup>1</sup>Note that ensembles of metrics have also been used in the larger context of curved space-time physics to average general relativistic gravitational fields over scales not accessible to observations [15–17].

an initial density  $N_i(x)$  on  $\mathbb{R}^2$  and denote by  $N(t, x, \omega)$  the density generated from  $N_i$  at time  $t$  by the Brownian motion on  $S_\omega = (\mathbb{R}^2, g(\omega))$ . The large scale aspects of diffusion will be described by the large scale behaviour of  $\bar{N}(t, x) = \langle N(t, x, \omega) \rangle$ . The effective transport equation obeyed by  $\bar{N}$  will be derived in the next section at second order in  $\varepsilon$  and compared on large scales to the standard diffusion equation on the plane.

**Effective equation describing the large scale diffusion.** – According to (5), the density  $N(t, x, \omega)$  generated from an arbitrary initial density  $N_i(x)$  by the Brownian motion on  $S_\omega = (\mathbb{R}^2, g(\omega))$  verifies the transport equation:

$$\partial_t N(t, x, \omega) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{ij}(t, x, \omega)} g^{ij}(t, x, \omega) \times \partial_j \left( \frac{N(t, x, \omega)}{\sqrt{\det g_{ij}(t, x, \omega)}} \right) \right). \quad (10)$$

Since eq. (10) is linear,  $N(t, x, \omega)$  can be obtained by convoluting the initial density profile  $N_i(x)$  with the Green function  $G(t, x, \omega)$  of (10). All information about the diffusion is thus contained in  $G$  and we search for an expression of this function as a power series in the amplitude  $\varepsilon$  of the perturbation around the flat metric:

$$G(t, x, \omega) = G_0(t, x) + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p G_p(t, x, \omega). \quad (11)$$

One can expand eq. (10) itself into powers of  $\varepsilon$  and insert the *Ansatz* (11) into the result. By collecting the terms in  $\varepsilon^p$ ,  $p \geq 0$ , one obtains a hierarchy of equations:

$$\partial_t G_p = \chi \Delta G_p + \chi S_p[h, G_0, \dots, G_{p-1}], \quad p \geq 0, \quad (12)$$

where the source term  $S_p$  is a functional of the metric perturbation  $h$  and of the  $G_q$ 's,  $q < p$ . The explicit expressions of the first three source terms are

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_1 &= \partial_i (h^{ij} (\partial_j G_0 - G_0 \partial_j l_0) - \eta^{ij} G_0 \partial_j l_1), \\ S_2 &= \partial_i (h^{ij} (\partial_j G_1 - G_0 \partial_j l_1 - G_1 \partial_j l_0) \\ &\quad - \eta^{ij} (G_0 \partial_j l_2 + G_1 \partial_j l_1)), \end{aligned} \quad (13)$$

with

$$\ln \left( \sqrt{\det g_{ij}(t, x, \omega)} \right) = l_0(t, x) + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p l_p(t, x, \omega), \quad (14)$$

$$l_0(t, x) = 0, \quad (15)$$

$$l_1(t, x, \omega) = -h(t, x, \omega), \quad (16)$$

$$l_2(t, x, \omega) = \frac{1}{2} h^2(t, x, \omega). \quad (17)$$

One finds that all  $S_p$ 's are, like  $S_1$  and  $S_2$ , divergences; equation  $p$  of the hierarchy therefore conserves the integral

of  $G_p$  over  $\mathbb{R}^2$ . One can thus add to the *Ansatz* (11) the following normalization conditions:

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_0(t, x) d^2x = 1 \quad (18)$$

and, for all  $p \geq 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_p(t, x, \omega) d^2x = 0. \quad (19)$$

These conditions are standard for this kind of expansion [18–20] and are imposed for all values of  $t$  and  $x$ . Observe finally that the initial density  $\delta(x)$  corresponding to  $G(t, x, \omega)$  contains no contributions in powers of  $\varepsilon$  superior or equal to 1. Thus,  $G_p(0, x, \omega) = \delta(x) \delta_{p0}$  for all  $\omega$ .

The zeroth order contribution  $G_0$  obeys the usual diffusion equation, is normalized to unity and verifies the initial condition  $G_0(0, x) = \delta(x)$ . This contribution is therefore identical to the Green function of the usual diffusion equation:

$$G_0(t, x) = \frac{1}{4\pi\chi t} \exp \left( -\frac{x^2}{4\chi t} \right). \quad (20)$$

Subsequent equations in the hierarchy are best solved or discussed in Fourier space. We define spatial Fourier transforms by

$$\hat{f}(t, \mathbf{k}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, \omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^2x \quad (21)$$

and find

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(t, \mathbf{k}, \omega) &= -\mathbf{k}^2 \sum_{nn'} \left( B_{nn'}(t, \omega) e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{K}_n)^2 \chi t} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}_{nn'}(t, \omega) e^{-(\mathbf{k} + \mathbf{K}_n)^2 \chi t} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\hat{G}_1(t, \mathbf{k}, \omega) =$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{k}^2 \chi \sum_{nn'} \left( \frac{B_{nn'}(t, \omega) f_{nn'}(t, \mathbf{k}) e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{K}_n)^2 \chi t}}{i\Omega_{n'} + [\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{K}_n)^2] \chi} \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{B}_{nn'}(t, \omega) \tilde{f}_{nn'}(t, \mathbf{k}) e^{-(\mathbf{k} + \mathbf{K}_n)^2 \chi t}}{-i\Omega_{n'} + [\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_n)^2] \chi} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

and

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(t, \mathbf{k}, \omega) &= -\mathbf{k}^2 \sum_{nn'} \left( B_{nn'}(t, \omega) \hat{G}_1(t, \mathbf{k} - \mathbf{K}_n, \omega) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}_{nn'}(t, \omega) \hat{G}_1(t, \mathbf{k} + \mathbf{K}_n, \omega) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

where  $B_{nn'}(t, \omega) = (A_{nn'}/2) e^{i\Phi_{nn'}(t, \omega)}$ ,  $\tilde{B}_{nn'}(t, \omega) = (A_{nn'}/2) e^{-i\Phi_{nn'}(t, \omega)}$ ,  $f_{nn'}(t, \mathbf{k}) = 1 - \exp(-i\Omega_{n'} t + ((\mathbf{k} - \mathbf{K}_n)^2 - \mathbf{k}^2) \chi t)$ ,  $\tilde{f}_{nn'}(t, \mathbf{k}) = 1 - \exp(i\Omega_{n'} t + ((\mathbf{k} + \mathbf{K}_n)^2 - \mathbf{k}^2) \chi t)$ , and  $\Phi_{nn'}(t, \omega) = \Omega_{n'} t + \phi_{nn'} + \omega$ .

The averages of  $\hat{S}_1$  and  $\hat{G}_1$  over  $\omega$  vanish identically. On the other hand,

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_2 \rangle(t, \mathbf{k}) &= \frac{\pi \mathbf{k}^2 \chi}{2} \sum_{pp', nn'} A_{pp'} A_{nn'} \\ &\times \left( \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{K}_p)^2 \tilde{f}_{nn'}(t, \mathbf{k} - \mathbf{K}_p) e^{i\psi_{nn'pp'}(t) - (\mathbf{Q}_{np} + \mathbf{k})^2 \chi t}}{-i\Omega_{n'} + [(\mathbf{k} - \mathbf{K}_p)^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_n)^2] \chi} \right. \\ &\left. + \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{K}_p)^2 f_{nn'}(t, \mathbf{k} + \mathbf{K}_p) e^{-i\psi_{nn'pp'}(t) - (\mathbf{Q}_{np} - \mathbf{k})^2 \chi t}}{i\Omega_{n'} + [(\mathbf{k} + \mathbf{K}_p)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{K}_p - \mathbf{K}_n)^2] \chi} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

where  $\psi_{nn'pp'}(t) = (\Omega_{p'} - \Omega_{n'})t + (\phi_{pp'} - \phi_{nn'})$  and  $\mathbf{Q}_{np} = \mathbf{K}_n - \mathbf{K}_p$ . This non-vanishing averaged source term modifies the large scale diffusion at second order in  $\varepsilon$ . Let  $F(t, \mathbf{k}) = -\langle \hat{S}_2(t, \mathbf{k}) \rangle / (\mathbf{k}^2 \hat{G}_0(t, \mathbf{k}))$ . Equation (12) implies that  $\langle \hat{G}_2 \rangle$  obeys  $(\partial_t + \chi \mathbf{k}^2) \langle \hat{G}_2 \rangle = -\chi \mathbf{k}^2 F(t, \mathbf{k}) \hat{G}_0(t, \mathbf{k})$ ; the equation obeyed by the averaged Fourier transform  $\langle \hat{G} \rangle(t, \mathbf{k})$  of the density  $G(t, x, \omega)$  thus reads, at second order in  $\varepsilon$ ,

$$\partial_t \langle \hat{G} \rangle = -\chi \mathbf{k}^2 (1 + \varepsilon^2 F(t, \mathbf{k})) \langle \hat{G} \rangle. \quad (26)$$

The function  $F(t, \mathbf{k})$  approximately reads, for small enough values of  $k$ :

$$\begin{aligned} F(t, \mathbf{k}) &\simeq -\frac{\pi \chi}{2} \sum_{pp', nn'} A_{pp'} A_{nn'} \mathbf{K}_p^2 \\ &\times \left( \frac{\tilde{f}_{nn'}(t, \mathbf{k} - \mathbf{K}_p) e^{i\psi_{nn'pp'}(t) - \mathbf{Q}_{np} \cdot (\mathbf{Q}_{np} + 2\mathbf{k}) \chi t}}{-i\Omega_{n'} + \mathbf{K}_n \cdot (2\mathbf{K}_p - \mathbf{K}_n) \chi} \right. \\ &\left. + \frac{f_{nn'}(t, \mathbf{k} + \mathbf{K}_p) e^{-i\psi_{nn'pp'}(t) - \mathbf{Q}_{np} \cdot (\mathbf{Q}_{np} - 2\mathbf{k}) \chi t}}{i\Omega_{n'} + \mathbf{K}_n \cdot (2\mathbf{K}_p - \mathbf{K}_n) \chi} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

**Discussion.** – Equation (26) proves that Brownian motions in the nearly flat metric (7) differ, even on large scales, from Brownian motions on the plane. The difference is however of second order in  $\varepsilon$  only and, from this point of view, the common assumption that small scale fluctuations of the geometry do not really affect the large scale features of diffusions seems to be actually validated by our result. Things are however not that simple. Expliciting  $f_{nn'}$  and  $\tilde{f}_{nn'}$  in the right-hand side of (27) shows that the modulus of the bracketed term depends on time through four real exponentials, two of which are strictly decreasing functions of  $t$ ; the other two are  $\exp(-\chi t(\mathbf{Q}_{np}^2 \pm 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}_{np}))$ . Fix  $\mathbf{k}$  and suppose the metric perturbation contains modes  $\mathbf{K}_n$  and  $\mathbf{K}_p$  such that  $|\mathbf{Q}_{np}| \sim |\mathbf{k}|$ ; also suppose, to simplify the discussion, that the angle between  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{Q}_{np}$  vanishes. One of the exponentials then behaves approximately like  $\exp(-3\mathbf{k}^2 \chi t)$  and

the other one like  $\exp(+\mathbf{k}^2 \chi t)$ ; the first exponential tends towards zero with time, but the other one tends towards infinity. The perturbative calculations presented in this letter thus lose their physical significance at scale  $\mathbf{k}$  when  $\varepsilon^2 F(t, \mathbf{k})$  becomes of order unity, *i.e.* after a typical time  $\tau(\mathbf{k}, \varepsilon)$  defined by  $\varepsilon^2 F(\tau(\mathbf{k}, \varepsilon), \mathbf{k}) \sim 1$ . Assuming that at least one  $A_{pp'} A_{nn'}$  is of order unity and that  $\Omega_{n'}$  does not exceed  $\chi \mathbf{K}_p^2$ , one finds  $\tau(\mathbf{k}, \varepsilon) \sim -2(\ln \varepsilon)/(\chi \mathbf{k}^2)$ . For  $t$  comparable to or larger than  $\tau(\mathbf{k}, \varepsilon)$ , the Brownian motion in the nearly flat metric is completely different at scale  $\mathbf{k}$  from the standard Brownian motion on the plane.

**Conclusion.** – We have investigated how small scale fluctuations in the metric of a 2D interface can influence the large scale aspects of diffusions on this interface. We have used Brownian motion as diffusion model and have restricted all computations to nearly flat metrics. We have proved that small scale fluctuations can have a cumulative effect on diffusions at large scale and render any model which neglects the small scale metric fluctuations completely inadequate after a time  $\tau(\mathbf{k}, \varepsilon)$  which depends on both the large scale wave vector  $\mathbf{k}$  and the amplitude of the perturbation  $\varepsilon$ . For situations investigated in this letter,  $\tau$  typically scales as  $|\ln \varepsilon|/\mathbf{k}^2$ . Further developments of the work we have presented should include numerical investigations of how large scale diffusion is affected by small scale metric fluctuations which lie outside of the perturbative regime, *i.e.* fluctuations whose amplitude is comparable to the amplitude of the average metric of the interface. Another extension would be to investigate the effects generated by a change of base manifold.

## REFERENCES

- [1] BROWN R., *Philos. Mag.*, **4** (1828) 161.
- [2] BROWN R., *Ann. Phys. Chem.*, **14** (1828) 294.
- [3] EINSTEIN A., *Investigations on the Theory of Brownian Motion*, reprint of the 1st English edition (1926) (Dover, New York) 1956.
- [4] VAN KAMPEN N. G., *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam) 1992.
- [5] ARNOLD L., *Random Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York) 1998.
- [6] ØKSENDAL B., *Stochastic Differential Equations*, 5th edition (Springer-Verlag Universitext, Berlin) 1998.
- [7] BRAGA J., DESTERRO J. M. P. and CARMO-FONSECA M., *Mol. Biol. Cell.*, **15** (2004) 4749.
- [8] DEBBASCH F., MALLICK K. and RIVET J. P., *J. Stat. Phys.*, **88** (1997) 945.
- [9] BRÜNGER A., PETERS R. and SCHULTEN K., *J. Chem. Phys.*, **82** (1984) 2147.
- [10] NEHLS S., SNAPP E. L., COLE N. B., ZAAL K. J. M., KENWORTHY A. K., ROBERTS T. H., ELLENBERG J., PRESLEY J. F., SIGGIA E. and LIPPINCOTT-SCHWARTZ J., *Nat. Cell. Biol.*, **2** (2000) 288.

- [11] CHRISTENSEN M., *J. Comput. Phys.*, **201** (2004) 421.
- [12] SBALZARINI I. F., HAYER A., HELENIUS A. and KOUMOUTSAKOS P., *Biophys. J.*, **90** (2006) 878.
- [13] ABARBANEL S. and DITKOWSKI A., *J. Comput. Phys.*, **133** (1996) 279.
- [14] DEBBASCH F. and MOREAU M., *Phys. A*, **343** (2004) 81.
- [15] DEBBASCH F., *Eur. Phys. J. B*, **37** (2004) 257.
- [16] DEBBASCH F., *Eur. Phys. J. B*, **43** (2005) 143.
- [17] DEBBASCH F. and OLLIVIER Y., *Astron. Astrophys.*, **433** (2005) 397.
- [18] CHAPMAN S. and COWLING T. G., *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases* (Cambridge University Press, Cambridge) 1952.
- [19] DEBBASCH F. and RIVET J. P., *J. Stat. Phys.*, **90** (1998) 1179.
- [20] DEBBASCH F., *J. Math. Phys.*, **45** (2004) 2744.

C. Chevalier and F. Debbasch: Is Brownian motion sensitive to geometry fluctuations? *Submitted to J. Stat. Phys.* ([25]).

# Is Brownian Motion sensitive to Geometry Fluctuations?

C. Chevalier\* and F. Debbasch†

Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA,  
3 rue Galilée, 94200 Ivry, France.

24th August 2007

## Abstract

Many situations of physical and biological interest involve diffusions on manifolds. It is usually assumed that irregularities in the geometry of these manifolds do not influence diffusions. The validity of this assumption is put to test by studying Brownian motions on nearly flat 2D surfaces. It is found by perturbative calculations that irregularities in the geometry have a cumulative and drastic influence on diffusions, and that this influence typically grows exponentially with time. The corresponding characteristic times are computed and discussed.

**Keywords:** Brownian motion, stochastic processes on manifolds, lateral diffusions.

## 1 Introduction

Stochastic process theory is one of the most popular tools used in modelling time-asymmetric phenomena, with applications as diverse as economics ([21, 22]), traffic management ([20, 15]), biology ([16, 2, 10, 8]), physics ([23]) and cosmology ([5]). Many diffusions of biological interest, for example the lateral diffusions ([4, 17]), can be modelled by stochastic processes defined on differential manifolds ([12, 13, 9, 18]). In practice, the geometry of the manifold is never known with infinite precision, and it is common to ascribe to the manifold an approximate, mean geometry and to assume irregularities in the geometry have, in the mean, a negligible influence on diffusion phenomena ([4, 1, 3, 6, 19]). The aim of this article is to investigate if this last assumption is indeed warranted.

---

\*chevalier\_claire@yahoo.fr

†fabrice.debbasch@gmail.com



To this end, we fix a base manifold  $\mathcal{M}$  and focus on Brownian motion. We introduce two metrics on  $\mathcal{M}$ . The first one,  $g$ , represents the real, irregular geometry of the manifold; what an observer would consider as the approximate, mean geometry is represented by another metric, which we call  $\bar{g}$ ; to keep the discussion as general as possible, both metrics are allowed to depend on time.

We compare the Brownian motions in the approximate metric  $\bar{g}$  to those in the real, irregular metric  $g$  by comparing their respective densities with respect to a reference volume measure, conveniently chosen as the volume measure associated to  $\bar{g}$ . Explicit computations are presented for diffusions on nearly flat 2D surfaces whose geometry fluctuates on spatial scales much smaller than the scales on which these diffusions are observed. We investigate in particular if the densities generated by Brownian motions in the real, irregular metric  $g$  coincide on large scales with the densities generated by Brownian motions in the approximate metric  $\bar{g}$ . We perform a perturbative calculation and find that, generically, these densities differ, even on large scales, and that the relative differences of their spatial Fourier components grow exponentially in time; on a given surface, the characteristic time  $\tau$  at which the perturbative terms become comparable (in magnitude) to the zeroth order terms depends on the amplitude  $\varepsilon$  of the irregularities and on the large scale wave vector  $k$  at which diffusions are observed; we find that  $\tau$  generally scales as  $-(\nu^{-2} \ln(\varepsilon/\nu^{1/2})) \times (1/|K^*|^2 \chi)$ , where  $\chi$  is the diffusion coefficient and  $\nu = |k|/|K^*|$ ,  $K^*$  being a typical wave-vector characterizing the metric irregularities. Our general conclusion is that geometry fluctuations have a cumulative effect on Brownian motion and that their influence on diffusions cannot be neglected.

## 2 Brownian motions on a manifold

### 2.1 Brownian motion in a time-independent metric

Let  $\mathcal{M}$  be a fixed real base manifold of dimension  $d$ . Let  $g$  be a time-independent metric on  $\mathcal{M}$ . This metric endows  $\mathcal{M}$  with a natural volume measure which will be denoted hereafter by  $d\text{Vol}_g$ . If  $C$  is a chart on  $\mathcal{M}$  with coordinates  $x = (x^i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , integrating against  $d\text{Vol}_g$  comes down to integrating against  $\sqrt{\det g_{ij}} d^d x$ , where the  $g_{ij}$ 's are the components of  $g$  in the coordinate basis associated to  $C$ .

There is a canonical definition of a Brownian motions on  $\mathcal{M}$  equipped with metric  $g$  ([14, 9, 11, 18]). Quite intuitively, these Brownian motions are defined through the diffusion equation obeyed by their densities  $n$  with respect to  $d\text{Vol}_g$ . Given an arbitrary positive diffusion constant  $\chi$ , this equation reads:

$$\partial_t n = \chi \Delta_g n, \quad (1)$$

where  $\Delta_g$  is the Laplace-Beltrami operator associated to  $g$  ([7]); given a chart  $C$

with coordinates  $x$ , one can write:

$$\Delta_g n = \frac{1}{\sqrt{\det g_{kl}}} \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}} g^{ij} \partial_j n \right), \quad (2)$$

where  $\partial_i$  represents partial derivation with respect to  $x^i$  and the  $g^{ij}$ 's are the components of the inverse of  $g$  in the coordinate basis associated to  $C$ . Observe that one of the reasons why this definition makes sense is that the diffusion equation (1) conserves the normalization of  $n$  with respect to  $d\text{Vol}_g$ .

## 2.2 Brownian motion in a time-dependent metric

The preceding definition of Brownian motion cannot be used in this case because the diffusion equation (1) does not conserve the normalization of  $n(t)$  with respect to the volume measure  $d\text{Vol}_{g(t)}$  associated to a time-dependent metric. To proceed, we introduce an arbitrary, time-independent metric  $\gamma$  on  $\mathcal{M}$ , denote by  $\mu_{g(t)|\gamma}$  the density of  $d\text{Vol}_{g(t)}$  with respect to  $d\text{Vol}_\gamma$ , and define the Brownian motion in the time-dependent metric  $g(t)$  as the stochastic process whose density  $n$  with respect to  $d\text{Vol}_{g(t)}$  obeys the following generalized diffusion equation:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t \left( \mu_{g(t)|\gamma} n \right) = \chi \Delta_{g(t)} n. \quad (3)$$

Given an arbitrary coordinate system  $(x)$ , equation (3) transcribes into:

$$\partial_t \left( \sqrt{\det g_{kl}} n \right) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}} g^{ij} \partial_j n \right), \quad (4)$$

which shows that the Brownian motion in  $g(t)$  does not actually depend on  $\gamma$ . Moreover,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} n &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_\gamma \mu_{g(t)|\gamma} n \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_\gamma \partial_t \left( \mu_{g(t)|\gamma} n \right) \\ &= \chi \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_\gamma \mu_{g(t)|\gamma} \Delta_{g(t)} n \\ &= \chi \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} \Delta_{g(t)} n \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Thus, contrary to (1), equation (3) conserves the normalization of  $n(t)$ .

### 3 How to compare Brownian motions in different metrics

Let  $\mathcal{M}$  be a real differential manifold of dimension  $d$ . We first introduce on  $\mathcal{M}$  a metric  $\bar{g}(t)$  which describes what an observer would consider as the approximate, mean geometry of the manifold. The real, irregular geometry of  $\mathcal{M}$  is described by a different metric  $g(t)$ .

Consider an arbitrary point  $O$  in  $\mathcal{M}$  and let  $B_t$  be the Brownian motion in  $g(t)$  that starts at  $O$ . The density  $n$  of  $B_t$  with respect to  $d\text{Vol}_{g(t)}$  obeys the diffusion equation:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{g(t)|\gamma} n) = \chi \Delta_{g(t)} n. \quad (6)$$

We denote by  $\bar{B}_t$  the Brownian motion in  $\bar{g}(t)$  that starts at point  $O$  and by  $\bar{n}$  its density with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ ; this density obeys:

$$\frac{1}{\mu_{\bar{g}(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{\bar{g}(t)|\gamma} \bar{n}) = \chi \Delta_{\bar{g}(t)} \bar{n}. \quad (7)$$

We will compare the two Brownian motions by comparing on large scales their respective densities with respect to a reference volume measure on  $\mathcal{M}$ . From an observational point of view, the best choice is clearly  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ , the volume measure associated to the approximate, mean geometry of the manifold. The density  $N$  of  $B_t$  with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$  is given in terms of  $n$  by:

$$N = \mu_{g(t)|\bar{g}(t)} n, \quad (8)$$

where  $\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}$  is the density of  $d\text{Vol}_{g(t)}$  with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ . The transport equation obeyed by  $N$  can be deduced from (6) and reads:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{g(t)|\gamma} N) = \chi \Delta_{g(t)} \left( \frac{1}{\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}} N \right). \quad (9)$$

In a chart  $C$  with coordinates  $(x)$ , (8) transcribes into:

$$N(t, x) = \frac{\sqrt{\det g_{ij}(t, x)}}{\sqrt{\det \bar{g}_{ij}(t, x)}} n(t, x) \quad (10)$$

and (9) becomes:

$$\partial_t \left( \sqrt{\det \bar{g}_{kl}(t, x)} N(t, x) \right) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}(t, x)} g^{ij}(t, x) \partial_j \frac{\sqrt{\det \bar{g}_{kl}(t, x)}}{\sqrt{\det g_{kl}(t, x)}} N(t, x) \right). \quad (11)$$

The precise question we investigate in this article is: how does the density  $N$  obeying (9) differ on large scales from the density  $\bar{n}$  obeying (7)? Since this question is extremely difficult to solve in its full generality, we now concentrate on nearly flat 2D surfaces.

## 4 Brownian motions on nearly flat 2D surfaces

### 4.1 The problem

We choose  $\mathbb{R}^2$  as base manifold  $\mathcal{M}$  and retain  $\bar{g} = \eta$ , the flat Euclidean metric on  $\mathbb{R}^2$ . The real, irregular metric of the manifold is still denoted by  $g(t)$  and we define  $h(t)$  by  $g^{-1}(t) = \eta^{-1} + \varepsilon h(t)$ , where  $\varepsilon$  is a small parameter (infinitesimal) tracing the nearly flat character of the surface. From now on, we will use the metric  $\eta$  (*resp.* the inverse of  $\eta$ ) to lower (*resp.* raise) all indices.

Let us choose a chart  $C$  where  $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1)$ . The tensor field  $h(t)$  is then represented by its components  $h^{ij}(t, x)$ . A particularly simple but very illustrative form for these components is:

$$h^{ij}(t, x) = \sum_{nm'} h_{nm'}^{ij} \cos(\omega_{n'} t - k_n \cdot x + \phi_{nm'}), \quad (12)$$

where  $k_n \cdot x = k_{n1}x^1 + k_{n2}x^2$  and both integer indices run through arbitrary finite sets. This choice has the double advantage of leading to conclusions which are sufficiently robust to remain qualitatively valid for all sorts of physically interesting perturbations  $h$  while making all technical aspects of the forthcoming computations and discussions as simple as possible. The *Ansatz* (12) will therefore be retained in the remainder of this article. Let us remark that perturbations  $h(t)$  proportional to  $\eta$  amount to a simple modification of the conformal factor linking the 2D metric  $g(t)$  to the flat metric  $\eta$ .

Equation (11) reads, in the chart  $C$ :

$$\partial_t N = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}(t, x)} g^{ij}(t, x) \partial_j \frac{N}{\sqrt{\det g_{kl}(t, x)}} \right) \quad (13)$$

or, alternately,

$$\partial_t N = \chi \partial_i \left( g^{ij}(t, x) (\partial_j N - N \partial_j l) \right), \quad (14)$$

where

$$l(t, x) = \ln \sqrt{\det g_{kl}(t, x)}. \quad (15)$$

### 4.2 General perturbative solution

The solution of (14) will be searched for as a perturbation series in the amplitude  $\varepsilon$  of the fluctuations:

$$N(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m N_m(t, x). \quad (16)$$

Setting to 0 both coordinates of the point  $O$  where the diffusion starts from, we further impose, for all  $x$ , that  $N_0(0, x) = \delta(x)$  and  $N_m(0, x) = 0$  for all  $m > 0$ .

The function  $l(t, x)$  can be expanded in  $\varepsilon$ , so that  $l(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m l_m(t, x)$  and one finds, for the first three contributions:

$$\begin{aligned} l_0(t, x) &= 0 \\ l_1(t, x) &= -\frac{1}{2} \eta_{ij} h^{ij}(t, x) \\ l_2(t, x) &= \frac{1}{4} \eta_{ik} \eta_{jl} h^{ij}(t, x) h^{kl}(t, x). \end{aligned} \quad (17)$$

Equation (14) can then be rewritten as the system

$$\partial_t N_m = \chi \Delta_\eta N_m + \chi S_m[h, N_r], m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_{m-1} \quad (18)$$

where the source term  $S_m$  is a functional of the fluctuation  $h$  and of the contributions to  $N$  of order strictly lower than  $m$ . In particular,

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= \partial_i \left( h^{ij} \partial_j N_0 + \frac{1}{2} N_0 \eta^{ij} \eta_{kl} \partial_j h^{kl} \right) \\ S_2 &= \partial_i \left( h^{ij} \partial_j N_1 + \frac{1}{2} (N_0 h^{ij} + N_1 \eta^{ij}) \eta_{kl} \partial_j h^{kl} - \frac{1}{4} N_0 \eta^{ij} \eta_{mk} \eta_{nl} \partial_j (h^{mn} h^{kl}) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Two remarks are now in order. Taken together,  $S_0(t, x) = 0$  and  $N_0(t, x) = \delta(x)$  imply that  $N_0$  coincides with the Green function of the standard diffusion equation on the flat plane:

$$N_0(t, x) = \frac{1}{4\pi\chi t} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right). \quad (20)$$

Moreover, the fact that  $S_m$  is a divergence for all  $m$  implies that the normalizations of all  $N_m$ 's are conserved in time. The initial condition  $N_m(0, x) = 0$  for all  $x$  and  $m > 0$  then implies that all  $N_m$ 's with  $m > 0$  remain normalized to zero and only contribute to the local density of particles, and not to the total density. This is perfectly coherent with the fact that  $N_0$  is normalized to unity.

Define now spatial Fourier transforms by

$$\hat{f}(t, k) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x) \exp(-ik \cdot x) d^2 x, \quad (21)$$

where  $k \cdot x = k_1 x^1 + k_2 x^2$ . A direct calculation then delivers:

$$\hat{S}_1(t, k) = -k_i \int_{\mathbb{R}^2} A^i(t, k, k') \hat{N}_0(t, k - k') d^2 k' \quad (22)$$

where

$$\hat{N}_0(t, k) = \exp(-\chi k^2 t) \quad (23)$$

and

$$A^i(t, k, k') = (k_j - k'_j) \hat{h}^{ij}(t, k') + \frac{1}{2} \eta^{ij} k'_j \eta_{kl} \hat{h}^{kl}(t, k'). \quad (24)$$

The first order density fluctuation  $N_1$  is then obtained by solving equation (18) with (22) as source term, taking into account the initial condition  $N_1(0, x) = 0$  for all  $x$ . One thus obtains:

$$\hat{N}_1(t, k) = I_1(t, k) \exp(-\chi k^2 t) \quad (25)$$

with

$$I_1(t, k) = \int_0^t \hat{S}_1(t', k) \exp(\chi k^2 t') dt'. \quad (26)$$

Equation (19) then gives:

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(t, k) &= -k_i \int_{\mathbb{R}^2} A^i(t, k, k') \hat{N}_1(t, k - k') d^2 k' \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} B^i(t, k', k'') \hat{N}_0(t, k - k') d^2 k' d^2 k'' \end{aligned} \quad (27)$$

with

$$\begin{aligned} B^i(t, k, k') &= \frac{1}{2} k'_j \eta_{kl} \hat{h}^{kl}(t, k') \hat{h}^{ij}(t, k - k') \\ &- \frac{1}{4} \eta^{ij} k'_j \eta_{mk} \eta_{nl} (\hat{h}^{mn}(t, k') \hat{h}^{kl}(t, k - k') + \hat{h}^{kl}(t, k') \hat{h}^{mn}(t, k - k')) \end{aligned} \quad (28)$$

The second order density fluctuation  $N_2$  then reads:

$$\hat{N}_2(t, k) = I_2(t, k) \exp(-\chi k^2 t) \quad (29)$$

with

$$I_2(t, k) = \int_0^t \hat{S}_2(t', k) \exp(\chi k^2 t') dt'. \quad (30)$$

### 4.3 How the irregularities influence diffusions

#### 4.3.1 First order terms

Let us now insert *Ansatz* (12) in the above expressions (22) and (25) for  $\hat{S}_1$  and  $\hat{N}_1$ . One finds:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(t, k) &= \sum_{nn'} [A_{nn'}^+(k) \exp(i(\omega_{n'} t + \phi_{nn'}) - (k + k_n)^2 \chi t) \\ &+ A_{nn'}^-(k) \exp(-i(\omega_{n'} t + \phi_{nn'}) - (k - k_n)^2 \chi t)] \end{aligned} \quad (31)$$

with

$$A_{nn'}^+(k) = -\frac{1}{2} \left[ k_i(k_j + k_{nj})h_{nn'}^{ij} - \frac{1}{2} \eta^{ij}k_ik_{nj}\eta_{kl}h_{nn'}^{kl} \right], \quad (32)$$

$$A_{nn'}^-(k) = -\frac{1}{2} \left[ k_i(k_j - k_{nj})h_{nn'}^{ij} + \frac{1}{2} \eta^{ij}k_ik_{nj}\eta_{kl}h_{nn'}^{kl} \right]. \quad (33)$$

This leads to:

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(t, k) &= \sum_{(n, n') \notin \sigma^+(k)} I_{nn'}^+(k) \left[ \exp(i\omega_{n'}t - (k + k_n)^2\chi t) - \exp(-k^2\chi t) \right] \\ &+ \sum_{(n, n') \notin \sigma^-(k)} I_{nn'}^-(k) \left[ \exp(-i\omega_{n'}t - (k - k_n)^2\chi t) - \exp(-k^2\chi t) \right] \\ &+ t \sum_{(n, n') \in \sigma^+(k)} A_{nn'}^+(k) \exp(i\phi_{nn'} - k^2\chi t) \\ &+ t \sum_{(n, n') \in \sigma^-(k)} A_{nn'}^-(k) \exp(-i\phi_{nn'} - k^2\chi t) \end{aligned} \quad (34)$$

with

$$I_{nn'}^+(k) = \frac{A_{nn'}^+(k) \exp(i\phi_{nn'})}{i\omega_{n'} + (k^2 - (k + k_n)^2)\chi}, \quad (35)$$

$$I_{nn'}^-(k) = \frac{A_{nn'}^-(k) \exp(i\phi_{nn'})}{-i\omega_{n'} + (k^2 - (k - k_n)^2)\chi} \quad (36)$$

and  $\sigma^\pm(k) = \{(n, n'), \pm i\omega_{n'} + (k^2 - (k \pm k_n)^2)\chi = 0\}$ . Note that both sets are disjoint, unless there is an  $(n, n')$  for which  $k_n = 0$  and  $\omega_{n'} = 0$ .

These results are best interpreted in the following way. The first order contribution  $\hat{N}_1$  density is advantageously compared to the zeroth order contribution  $\hat{N}_0$ . One finds from (34) and (23) that:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{N}_1(t, k)}{\hat{N}_0(t, k)} &= \sum_{(n, n') \notin \sigma^+(k)} I_{nn'}^+(k) \left[ \exp(i\omega_{n'}t - (k_n^2 + 2k \cdot k_n)\chi t) - 1 \right] \\ &+ \sum_{(n, n') \notin \sigma^-(k)} I_{nn'}^-(k) \left[ \exp(-i\omega_{n'}t - (k_n^2 - 2k \cdot k_n)\chi t) - 1 \right] \\ &+ t \sum_{(n, n') \in \sigma^+(k)} A_{nn'}^+(k) \exp(i\phi_{nn'}) \\ &+ t \sum_{(n, n') \in \sigma^-(k)} A_{nn'}^-(k) \exp(-i\phi_{nn'}). \end{aligned} \quad (37)$$

This expression characterizes how Brownian motions in the irregular metric differ, at first order, from Brownian motions on the flat Euclidean plane. The dependence on the wave vector  $k$  indicates that the influence of the irregularities varies with the spatial scale at which the diffusion is observed. Two opposite

situations are particularly worth commenting upon. Take a certain  $k_n$  and consider  $\hat{N}_1$  at scales characterized by wave vectors much smaller than  $k_n$ , say  $|k| = |k_n| O(\nu)$ , where  $\nu$  is an infinitesimal (small parameter). Neglecting the contributions of the frequencies  $\omega_{n'}$ , the amplitudes  $A_{nn'}^\pm(k)$  typically scale as  $|k| \ll |k_n|$ , so that the  $I_{nn'}^\pm(k)$ 's scale as  $O(\nu)$ . Note however that perturbations  $h$  proportional to  $\eta$  do not obey this typical scaling, but rather  $A_{nn'}^\pm(k) \sim k^2$ , and  $I_{nn'}^\pm(k) \sim O(\nu^2)$ . The sets  $\sigma^\pm$  are empty and the time-dependence of  $|\hat{N}_1/\hat{N}_0|$  is controlled by the real exponentials in (37), which essentially decrease as  $\exp(-k_n^2 \chi t)$ . The first order relative contribution  $\varepsilon \hat{N}_1/\hat{N}_0$  thus tends towards a quantity  $L_1(k)$  which is linear in the  $I_{nn'}^\pm(k)$ ; the typical relaxation time is  $\tau_1 \sim 1/(\chi k_n^2)$ , which is much smaller than the diffusion time  $1/(\chi k^2)$  associated to scale  $k$ . Moreover, the limit  $L_1(k)$  scales as  $O(\varepsilon \nu)$ , except for perturbations  $h$  proportional to  $\eta$ , for which it scales as  $O(\varepsilon \nu^2)$ ;  $L_1(k)$  is therefore always much smaller than  $\varepsilon$  and, in particular, tends to zero with  $\nu$  i.e. as the scale separation tends to infinity. The effect of the  $k_n$  Fourier mode on scales characterized by a wave vector  $k$  verifying  $|k| \ll |k_n|$  is thus in practice negligible.

Consider now the opposite case, i.e.  $|k|$  comparable to, or larger than  $|k_n|$ . Neglecting again the contribution of the frequencies  $\omega_{n'}$ , the amplitudes  $A_{nn'}^\pm(k)$  then scale as  $k^2$ , and  $I_{nn'}^\pm(k) \sim |k| / |k_n|$ . Let now  $\theta$  be the angle between  $k$  and  $k_n$  and suppose, to simplify the discussion, that  $\cos \theta$  does not vanish. At least one of the exponentials in (37) will then be an increasing function of time provided  $|k| > |k_n| / (2 \cos \theta)$ . Take for example  $k = k_n$ ; the second exponential in (37) then increases with a characteristic time-scale  $1/(k^2 \chi)$ . This means that the first order contributions of the irregularities to the density actually become comparable to unity at this scale at characteristic times  $\tau_1 \sim -(\ln \varepsilon)/(k^2 \chi)$ ; this time probably also signals the break down of the perturbative expansion in  $\varepsilon$  for the scale  $k = k_n$ . As for the linear terms in  $t$  appearing on the right-hand side of (37), they actually contribute to  $\hat{N}_1/\hat{N}_0$  if at least one of the sets  $\sigma^\pm(k)$  is not empty. This condition is realized if  $\omega_{n'} = 0$  and  $|k| = |k_n| / (2 \cos \theta)$ .

The conclusion of this discussion is that, at first order in the amplitude of the perturbation  $h$ , a given Fourier mode  $k_n$  of  $h$  dramatically influences diffusions on scales characterized by wave vectors with modulus comparable to or larger than  $|k_n|$ , but has a negligible influence on scales characterized by wave vectors with modulus much smaller than  $|k_n|$ . We will now show that this conclusion cannot be extended to all perturbation orders and that taking into account terms of orders higher than 1 proves that  $h$  generally influences diffusions on all scales.

### 4.3.2 Second order terms

It is straightforward to obtain from equations (27), (29), (34) and (23) explicit expressions for  $\hat{S}_2(t, k)$  and  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$ . These expressions are however extremely heavy and do not warrant reproduction in the main part of this article; an Appendix is therefore devoted to their presentation.



Consider now, for example, the contributions  $D_1(t, k)$  and  $D_2(t, k)$  to  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$  (given by equations (44) and (45) in the Appendix). The right-hand sides of (44) and (45) contain four exponentials of given  $(n, n', p, p')$ ; these involve the wave vectors  $K_{np}^\pm = k_n \pm k_p$ . Let us for the moment ignore the factors in front of these exponentials. Let  $k$  be an arbitrary wave vector and let  $\theta^\pm$  be the angle between  $k$  and  $K_{np}^\pm$ . Each of the conditions  $2k \cdot \cos \theta^\pm > |K_{np}^\pm|$  makes one of the four exponentials an increasing function of  $t$ . At second order, the spatial scales at which diffusions are influenced by the perturbation  $h$  are thus determined, not by the  $k_n$ 's, but by the combinations  $K_{np}^\pm = k_n \pm k_p$ . Indeed, quite generally, the temporal behaviour of terms of order  $q$ ,  $q \geq 1$ , will be determined by combinations of  $q$  wave vectors  $k_n$ . For perturbations  $h$  with a rich enough spectrum, these combinations correspond to all sorts of spatial scales and, in particular, to scales much larger than those over which  $h$  itself varies. Thus,  $h$  will generally influence diffusions on all spatial scales.

Let us elaborate quantitatively on this conclusion by further exploring the behaviour of  $D_1(t, k)$  and  $D_2(t, k)$ . Let us start with  $D_1(t, k)$ . Suppose for example that the moduli of all  $k_n$ 's are of the same order of magnitude, conveniently denoted by  $K^*$ , but that there are some  $n$  and  $p$  for which  $|K_{np}^-| \sim K^*O(\nu)$ , where  $\nu \ll 1$ . The condition introduced above, which ensures that one of the exponentials involving  $K_{np}^-$  grows with  $t$ , then translates into  $|k| > (2/\cos \theta^-)K^*O(\nu)$ , and is realized for  $|k| = K^*O(\nu)$  provided  $\cos \theta^- \lesssim 1$ . Let us check now that the factors in front of the exponentials do not tend towards zero with  $\nu$ . Ignoring as before the influence of the frequencies  $\omega_q$ , the quantity  $I_{nn'}^-(k + k_p)$  (see (36)) scales as  $A_{nn'}^-(k + k_p)/k_p^2$  i.e. as  $k_p^2/k_p^2 = 1$ . The quantity  $A_{pp'}^+(k)$  scales as  $|k| k_p$  if  $h$  is not proportional to  $\eta$ , or as  $k^2$  otherwise. Finally, the quantity  $\tilde{J}_{nn'pp'}^-(k)$  scales as  $(Q_{np}(k))^{-1} = [2k \cdot K_{np}^- - (K_{np}^-)^2]^{-1}$ . The factor in front of the exponential thus scales as  $|k| k_p | (Q_{np}(k))^{-1}$  for perturbations  $h$  not proportional to  $\eta$ , and as  $k^2(Q_{np}(k))^{-1}$  otherwise. Taking into account that  $|k| \sim |K_{np}|$  and putting  $\cos \theta^- = 1$  to simplify the discussion, one finds that the factor in front of the exponentials scales as  $|k| k_p / |k| = O(1/\nu)$  if  $h$  is not proportional to  $\eta$  and as  $O(1)$  otherwise. This factor therefore does not tend to zero with the separation scale parameter  $\nu$ . Actually, for perturbations which are not proportional to  $\eta$ , this factor tends to infinity as  $\nu$  tends to zero, a fact which only increases the influence of  $h$  on diffusions. The factor in front of the exponential involving  $K_{np}^-$  in  $D_2(t, k)$  scales as  $\tilde{J}_{nn'}^-(k)kk_p$ ; since  $\tilde{J}_{nn'}^-(k)$  scales as  $(1/K^{*2})O(1/\nu^2)$ , the quantity  $\tilde{J}_{nn'}^-(k)kk_p$  scales as  $O(1/\nu)$ , which also tends to infinity with the scale separation.

These estimates can be used to evaluate some characteristic times. For perturbations proportional to  $h$ , the second order term  $\varepsilon^2 D_1$  reaches unity after a characteristic time  $\tau_2^\eta \sim -(2/\nu^2 K^{*2} \chi) \ln \varepsilon$ ; for perturbations not proportional to  $\eta$ , the corresponding characteristic time is  $\tau_2 \sim -(2/\nu^2 K^{*2} \chi) \ln(\varepsilon/\nu^{1/2}) \ll \tau_2^\eta$ . For all perturbations, the second order term  $\varepsilon^2 D_2$  becomes of order unity after a typical time  $\tilde{\tau}_2 = \tau_2$ . These characteristic times are probably upper bound for the

time at which the perturbation expansion ceases to be valid for scale  $k$ .

## 5 Conclusion

We have investigated how metric irregularities influence Brownian motion on a differential manifold. We have performed explicit perturbative calculations for nearly flat 2D manifolds and reached the conclusion that the metric irregularities have a cumulative effect on Brownian motion; more precisely, we have found that the relative difference of the spatial Fourier components of the densities generated by a Brownian motion on the flat surface and a Brownian motion on the irregular surface grows exponentially with time on all spatial scales, including scales much larger than those characteristic of the metric perturbation; characteristic times have also been derived.

Let us conclude this article by mentioning some problems left open for further study. As stated in the introduction, many biological phenomena involve lateral diffusions on 2D interfaces. The results of this article suggest that the fluctuations of the interfaces profoundly affect these lateral diffusions; the discrepancies between real diffusions on irregular interfaces and idealized diffusions on highly regular surfaces are therefore probably observable and the biological consequences of these discrepancies should be carefully studied. On the theoretical side, one should envisage a non perturbative treatment of at least some of the problems studied in this article; this is probably best achieved through numerical simulations; a first step would be to confirm numerically, at least for 2D diffusions, the characteristic time estimates we have derived here. Finally, the case of relativistic diffusions in fluctuating space-times is certainly worth investigating, notably in a cosmological context.

## Appendix

Equations (27), (34), (23) lead to:

$$\hat{S}_2(t, k) = C_1(t, k) + C_2(t, k) + C_3(t, k) \quad (38)$$

where

$$\begin{aligned}
C_1(t, k) = & \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ pp'}} I_{nn'}^+(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{pp'}) \left[ \exp\left(i(\omega_{n'} + \omega_{p'})t - (k + k_n + k_p)^2 \chi t\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(i\omega_{p'}t - (k + k_p)^2 \chi t\right) \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ pp'}} I_{nn'}^+(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{pp'}) \left[ \exp\left(i(\omega_{n'} - \omega_{p'})t - (k + k_n - k_p)^2 \chi t\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(-i\omega_{p'}t - (k - k_p)^2 \chi t\right) \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ pp'}} I_{nn'}^-(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{pp'}) \left[ \exp\left(i(-\omega_{n'} + \omega_{p'})t - (k - k_n + k_p)^2 \chi t\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(i\omega_{p'}t - (k + k_p)^2 \chi t\right) \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ pp'}} I_{nn'}^-(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{pp'}) \left[ \exp\left(-i(\omega_{n'} + \omega_{p'})t - (k - k_n - k_p)^2 \chi t\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(-i\omega_{p'}t - (k - k_p)^2 \chi t\right) \right], \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(t, k) = & \sum_{nn'pp'} k_i k_n j \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \exp(i(\omega_{n'} + \omega_{p'})t - (k + k_n + k_p)^2 \chi t) \\
& + \sum_{nn'pp'} k_i k_n j \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(i(\phi_{nn'} - \phi_{pp'})) \exp(i(\omega_{n'} - \omega_{p'})t - (k + k_n - k_p)^2 \chi t) \\
& - \sum_{nn'pp'} k_i k_n j \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(i(-\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \exp(i(-\omega_{n'} + \omega_{p'})t - (k - k_n + k_p)^2 \chi t) \\
& - \sum_{nn'pp'} k_i k_n j \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(-i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \exp(i - (\omega_{n'} + \omega_{p'})t - (k - k_n - k_p)^2 \chi t), \quad (40)
\end{aligned}$$

with

$$\tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} = \frac{1}{8} \left[ \eta_{kl} h_{nn'}^{kl} h_{pp'}^{ij} - \frac{1}{2} \eta^{ij} \eta_{qk} \eta_{rl} (h_{nn'}^{qr} h_{pp'}^{kl} + h_{pp'}^{qr} h_{nn'}^{kl}) \right] \quad (41)$$

and

$$\begin{aligned}
C_3(t, k) = & t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^+(k) \\ pp'}} A_{nn'}^+(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \exp(i\omega_{p'} t - (k + k_p)^2 \chi t) \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^+(k) \\ pp'}} A_{nn'}^+(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(i(\phi_{nn'} - \phi_{pp'})) \exp(-i\omega_{p'} t - (k - k_p)^2 \chi t) \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^-(k) \\ pp'}} A_{nn'}^-(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i(-\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \exp(i\omega_{p'} t - (k + k_p)^2 \chi t) \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^-(k) \\ pp'}} A_{nn'}^-(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \exp(-i\omega_{p'} t - (k - k_p)^2 \chi t).
\end{aligned} \tag{42}$$

We get, from equations (29), (38) and (23):

$$\frac{\hat{N}_2(t, k)}{\hat{N}_0(t, k)} = \sum_{i=1}^8 D_i(t, k) \tag{43}$$

where

$$\begin{aligned}
D_1(t, k) = & \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (n, n', p, p') \notin \tau^+(k)}} I_{nn'}^+(k + k_p) A_{pp'}^+(k) J_{nn' pp'}^+(k) \left[ \exp(i(\omega_{n'} + \omega_{p'}) t - ((k_n + k_p)^2 + 2k.(k_n + k_p)) \chi t) - 1 \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (n, n', p, p') \notin \tilde{\tau}^+(k)}} I_{nn'}^+(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \tilde{J}_{nn' pp'}^+(k) \left[ \exp(i(\omega_{n'} - \omega_{p'}) t - ((k_n - k_p)^2 + 2k.(k_n - k_p)) \chi t) - 1 \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (n, n', p, p') \notin \tilde{\tau}^-(k)}} I_{nn'}^-(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \tilde{J}_{nn' pp'}^-(k) \left[ \exp(i(-\omega_{n'} + \omega_{p'}) t - ((k_n - k_p)^2 - 2k.(k_n - k_p)) \chi t) - 1 \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (n, n', p, p') \notin \tau^-(k)}} I_{nn'}^-(k - k_p) A_{pp'}^-(k) J_{nn' pp'}^-(k) \left[ \exp(-i(\omega_{n'} + \omega_{p'}) t - ((k_n + k_p)^2 - 2k.(k_n + k_p)) \chi t) - 1 \right],
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
D_2(t, k) = & \sum_{\substack{(n, n', p, p') \notin \tau^+(k)}} J_{nn' pp'}^+(k) k_i k_n j \tilde{B}_{nn' pp'}^{ij} \exp(i\phi_{nn'}) \left[ \exp(i(\omega_{n'} + \omega_{p'})t - ((k_n + k_p)^2 + 2k \cdot (k_n + k_p))\chi t) - 1 \right] \\
& + \sum_{\substack{(n, n', p, p') \notin \tilde{\tau}^+(k)}} \tilde{J}_{nn' pp'}^+(k) k_i k_n j \tilde{B}_{nn' pp'}^{ij} \exp(i\phi_{nn'}) \left[ \exp(i(\omega_{n'} - \omega_{p'})t - ((k_n - k_p)^2 + 2k \cdot (k_n - k_p))\chi t) - 1 \right] \\
& - \sum_{\substack{(n, n', p, p') \notin \tilde{\tau}^-(k)}} \tilde{J}_{nn' pp'}^-(k) k_i k_n j \tilde{B}_{nn' pp'}^{ij} \exp(-i\phi_{nn'}) \left[ \exp(i(-\omega_{n'} + \omega_{p'})t - ((k_n - k_p)^2 - 2k \cdot (k_n - k_p))\chi t) - 1 \right] \\
& - \sum_{\substack{(n, n', p, p') \notin \tau^-(k)}} J_{nn' pp'}^-(k) k_i k_n j \tilde{B}_{nn' pp'}^{ij} \exp(-i\phi_{nn'}) \left[ \exp(-i(\omega_{n'} + \omega_{p'})t - ((k_n + k_p)^2 - 2k \cdot (k_n + k_p))\chi t) - 1 \right],
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
D_3(t, k) = & - \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (p, p') \notin \sigma^+(k)}} I_{nn'}^+(k + k_p) I_{pp'}^+(k) \left[ \exp(i\omega_{p'}t - (k_p^2 + 2k \cdot k_p)\chi t) - 1 \right] \\
& - \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (p, p') \notin \sigma^-(k)}} I_{nn'}^+(k - k_p) I_{pp'}^-(k) \left[ \exp(-i\omega_{p'}t - (k_p^2 - 2k \cdot k_p)\chi t) - 1 \right] \\
& - \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (p, p') \notin \sigma^+(k)}} I_{nn'}^-(k + k_p) I_{pp'}^+(k) \left[ \exp(i\omega_{p'}t - (k_p^2 + 2k \cdot k_p)\chi t) - 1 \right] \\
& - \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (p, p') \notin \sigma^-(k)}} I_{nn'}^-(k - k_p) I_{pp'}^-(k) \left[ \exp(-i\omega_{p'}t - (k_p^2 - 2k \cdot k_p)\chi t) - 1 \right],
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
D_4(t, k) = & t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (n, n', p, p') \in \tau^+(k)}} I_{nn'}^+(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{pp'}) \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (n, n', p, p') \in \tilde{\tau}^+(k)}} I_{nn'}^+(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{pp'}) \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (n, n', p, p') \in \tilde{\tau}^-(k)}} I_{nn'}^-(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{pp'}) \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (n, n', p, p') \in \tau^-(k)}} I_{nn'}^-(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{pp'}),
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
D_5(t, k) = & - t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (p, p') \in \sigma^+(k)}} I_{nn'}^+(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{pp'}) \\
& - t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^+(k) \\ (p, p') \in \sigma^-(k)}} I_{nn'}^+(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{pp'}) \\
& - t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (p, p') \in \sigma^+(k)}} I_{nn'}^-(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{pp'}) \\
& - t \sum_{\substack{(n, n') \notin \sigma^-(k) \\ (p, p') \in \sigma^-(k)}} I_{nn'}^-(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{pp'}), \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_6(t, k) = & t \sum_{(n, n', p, p') \in \tau^+(k)} k_i k_{nj} \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \\
& + t \sum_{(n, n', p, p') \in \tilde{\tau}^+(k)} k_i k_{nj} \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(i(\phi_{nn'} - \phi_{pp'})) \\
& - t \sum_{(n, n', p, p') \in \tilde{\tau}^-(k)} k_i k_{nj} \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(i(-\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \\
& - t \sum_{(n, n', p, p') \in \tau^-(k)} k_i k_{nj} \tilde{B}_{nn'pp'}^{ij} \exp(-i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})), \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_7(t, k) = & t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^+(k) \\ (p, p') \notin \sigma^+(k)}} A_{nn'}^+(k + k_p) I_{pp'}^+(k) \exp(i\phi_{nn'}) \left[ \exp(i\omega_{p'} t - (k_p^2 + 2k \cdot k_p) \chi t) - 1 \right] \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^+(k) \\ (p, p') \notin \sigma^-(k)}} A_{nn'}^+(k - k_p) I_{pp'}^-(k) \exp(i\phi_{nn'}) \left[ \exp(-i\omega_{p'} t - (k_p^2 - 2k \cdot k_p) \chi t) - 1 \right] \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^-(k) \\ (p, p') \notin \sigma^+(k)}} A_{nn'}^-(k + k_p) I_{pp'}^+(k) \exp(-i\phi_{nn'}) \left[ \exp(i\omega_{p'} t - (k_p^2 + 2k \cdot k_p) \chi t) - 1 \right] \\
& + t \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^-(k) \\ (p, p') \notin \sigma^-(k)}} A_{nn'}^-(k - k_p) I_{pp'}^-(k) \exp(-i\phi_{nn'}) \left[ \exp(-i\omega_{p'} t - (k - k_p)^2 \chi t) - 1 \right], \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_8(t, k) = & t^2 \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^+(k) \\ (p, p') \in \sigma^+(k)}} A_{nn'}^+(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \\
& + t^2 \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^+(k) \\ (p, p') \in \sigma^-(k)}} A_{nn'}^+(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(i(\phi_{nn'} - \phi_{pp'})) \\
& + t^2 \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^-(k) \\ (p, p') \in \sigma^+(k)}} A_{nn'}^-(k + k_p) A_{pp'}^+(k) \exp(i(-\phi_{nn'} + \phi_{pp'})) \\
& + t^2 \sum_{\substack{(n, n') \in \sigma^-(k) \\ (p, p') \in \sigma^-(k)}} A_{nn'}^-(k - k_p) A_{pp'}^-(k) \exp(-i(\phi_{nn'} + \phi_{pp'})), \quad (51)
\end{aligned}$$

with

$$J_{nn'pp'}^+(k) = \frac{\exp(i\phi_{pp'})}{i(\omega_{n'} + \omega_{p'}) + (k^2 - (k + k_n + k_p)^2)\chi}, \quad (52)$$

$$\tilde{J}_{nn'pp'}^+(k) = \frac{\exp(-i\phi_{pp'})}{i(\omega_{n'} - \omega_{p'}) + (k^2 - (k + k_n - k_p)^2)\chi}, \quad (53)$$

$$\tilde{J}_{nn'pp'}^-(k) = \frac{\exp(i\phi_{pp'})}{i(-\omega_{n'} + \omega_{p'}) + (k^2 - (k - k_n + k_p)^2)\chi}, \quad (54)$$

$$J_{nn'pp'}^-(k) = \frac{\exp(-i\phi_{pp'})}{-i(\omega_{n'} + \omega_{p'}) + (k^2 - (k - k_n - k_p)^2)\chi} \quad (55)$$

and

$$\tau^\pm(k) = \pm i(\omega_{n'} + \omega_{p'}) + (k^2 - (k \pm k_n \pm k_p)^2)\chi, \quad (56)$$

$$\tilde{\tau}^+(k) = i(\omega_{n'} - \omega_{p'}) + (k^2 - (k + k_n - k_p)^2)\chi, \quad (57)$$

$$\tilde{\tau}^-(k) = i(-\omega_{n'} + \omega_{p'}) + (k^2 - (k - k_n + k_p)^2)\chi. \quad (58)$$

## References

- [1] S. Abarbanel and A. Ditkowski. Asymptotically stable fourth-order accurate schemes for the diffusion equation on complex shapes. *J. Comput. Phys.*, 133:279, 1996.
- [2] L. J. S. Allen. *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Prentice Hall, 2003.
- [3] J. Braga, J. M. P. Desterro and M. Carmo-Fonseca. *Mol. Bio. Cell*, 15:4749-4760, 2004.

- [4] A. Brünger, R. Peters and K. Schulten. Continuous fluorescence microphotolysis to observe lateral diffusion in membranes: theoretical methods and applications. *J. Chem. Phys.*, 82:2147, 1984.
- [5] C. Chevalier and F. Debbasch. Fluctuation-Dissipation Theorems in an expanding Universe. *J. Math. Phys.*, 48:023304, 2007.
- [6] M. Christensen. How to simulate anisotropic diffusion processes on curved surfaces. *J. Comput. Phys.*, 201:421-435, 2004.
- [7] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov and A. T. Fomenko. *Modern geometry - Methods and applications*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [8] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics **46**, SIAM, 2005.
- [9] M. Emery. *Stochastic calculus in manifolds*. Springer-Verlag, 1989.
- [10] N. S. Goel and N. Richter-Dyn. *Stochastic Models in Biology*. The Blackburn Press, 2004.
- [11] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland Mathematical Library, 2nd edition, 1989.
- [12] K. Itô. On stochastic differential equations on a differentiable manifold i. *Nagoya Math. J.*, 1:35-47, 1950.
- [13] K. Itô. On stochastic differential equations on a differentiable manifold ii. *MK*, 28:82-85, 1953.
- [14] H. P. McKean. *Stochastic integrals*. Academic Press, New York and London, 1969.
- [15] D. Mitra and Q. Wang. Stochastic traffic engineering for demand uncertainty and risk-aware network revenue management. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 13(2):221-233, 2005.
- [16] J. D. Murray. *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, Mathematical Biology, Springer, 2002.
- [17] S. Nehls et al. Dynamics and retention of misfolded proteins in native membranes. *Nat. Cell. Bio.*, 2:288-295, 2000.
- [18] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 5th edition, 1998.
- [19] I. F. Sbalzarini, A. Hayer, A. Helenius and P. Koumoutsakos. Simulations of (an)isotropic diffusion on curved biological interfaces. *Biophysical J.*, 90(3):878-885, 2006.



- [20] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel and N. Ito. Discrete stochastic models for traffic flow. *Phys. Rev. E*, 51(4):2939-2949, 1995.
- [21] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004.
- [22] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004.
- [23] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1992.

C. Chevalier and F. Debbasch: Fluctuation-Dissipation Theorems in an Expanding Universe. *J. Math. Phys.*, 48:023304, 2007 ([32]).

## Fluctuation-dissipation theorems in an expanding universe

C. Chevalier and F. Debbasch

*Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA, 3 rue Galilée 94200 Ivry, France*

(Received 20 April 2006; accepted 9 January 2007; published online 28 February 2007)

The recently constructed minimal extension of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process to curved space-time cannot be used to model realistically diffusions on cosmological scales because it does not take into account the evolution of the thermodynamical state of the matter with cosmological time. We therefore introduce a new class of non-minimal extensions characterized by time-dependent friction and noise coefficients. These new processes admit time-dependent Jüttner distributions as possible measures in momentum space; associated fluctuation-dissipation theorems are also proved and discussed. © 2007 American Institute of Physics. [DOI: [10.1063/1.2437852](https://doi.org/10.1063/1.2437852)]

### I. INTRODUCTION

The special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process (ROUP) was introduced in 1997 (Ref. 3) to model the stochastic dynamics of a point particle diffusing in flat space-time and surrounded by an isotropic fluid characterized by a possibly non-uniform 4-velocity field  $U$ . This process describes the interaction of the diffusing particle with the surrounding fluid through two forces; the first of these is deterministic and represents the effective frictional force experienced by the particle; the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process characterizes this force by a single friction coefficient  $\alpha$ . The other force is stochastic and, being proportional to a Gaussian white noise, is fully determined by another single coefficient  $D$ , which fixes its amplitude. Of particular importance is the fact that  $\alpha$  and  $D$  are, like their Galilean analogues, both point and momentum independent; they are thus simply two real constants.

It has been proven<sup>3</sup> that, for uniform velocity fields  $U$ , the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process admits as an invariant measure in  $p$ -space the Jüttner distribution of temperature  $T = D / \alpha m k_B$ . This quantity can be interpreted as the equilibrium temperature of the surrounding fluid, and its expression on terms of  $\alpha$  and  $D$  constitutes a fluctuation-dissipation theorem.

This special relativistic process has been recently minimally extended to curved space-times.<sup>4</sup> This extension still describes the force experienced by a diffusing particle through two coefficients  $\alpha$  and  $D$  and, as in the flat space-time process, these quantities are taken to be both point and momentum independent. This general relativistic process has been used to study diffusion in simple cosmological models. The simplest possible model supposes the space-time to be spatially homogeneous and isotropic, and describes the matter content of the universe by a perfect fluid; this fluid is sometimes called the cosmological fluid.

Particularly convenient coordinates on the space-times are then the so-called comoving coordinates<sup>6</sup>; the cosmological fluid is at rest in these coordinates and all quantities characterizing the model depend only on the time-coordinate  $t$ . Because of the assumed homogeneity and isotropy of the space-time, the metric is fully determined by a single field  $a(t)$ , called the expansion factor, and the thermodynamical state of the matter present in the universe is entirely determined by a temperature field  $T(t)$ . It is a standard result of theoretical cosmology<sup>6</sup> that  $T(t)$  varies approximately as  $1/a(t)$ .

The minimal general relativistic extension of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process has been used to study how a particle diffuses in an homogeneous and isotropic universe

through its interaction with the cosmological fluid.<sup>4</sup> It has been proven that the diffusion admits no invariant measure in  $p$ -space. Approximate spatially uniform but time-dependent solutions of the transport equation have been found in physically relevant situations where the characteristic relaxation time-scale  $1/\alpha$  is much smaller than the Hubble time  $H^{-1}(t)=a/\dot{a}$ . These solutions coincide with the time-independent Jüttner distribution of temperature  $T=D/\alpha mk_B$  in the limit where  $a$  becomes time independent, i.e., when the space-time becomes flat and the process degenerates into the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. But, for a general  $a(t)$ , these solutions do not coincide with any time-dependent Jüttner distribution and there is therefore no time-dependent temperature naturally associated with the diffusion. This represents, however, a serious physical limitation of the minimally extended process introduced in Ref. 4 because, as mentioned earlier, the thermodynamical state of the matter in the universe *can*, to a very good approximation, be characterized by a time-dependent temperature  $T(t)$ .

The aim of this article is to remedy this situation by introducing new, non-minimal general relativistic extensions of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process that do admit time-dependent Jüttner distributions as possible densities in spatially homogeneous and isotropic universes. The material is organized as follows. Section II reviews some basic results about the special relativistic process and the associated flat space-time fluctuation-dissipation theorem. Section III describes the minimal extension constructed in Ref. 4 and its application to cosmological diffusions. Section IV presents the new, non-minimal extensions and the associated curved space-time fluctuation-dissipation theorems. More precisely, the class of non-minimal extensions considered in this manuscript is described in Sec. IV A. All considered processes are still fully characterized by two coefficients  $\alpha$  and  $D$  only, but these are now allowed to depend on the cosmological time  $t$  and on the adimensionalized energy  $\gamma$  of the diffusing particle. We prove in Sec. IV B that, given any expansion factor  $a(t)$  and temperature field  $T(t)$ , a process in the class considered will admit the Jüttner distribution of temperature  $T(t)$  as a possible density in momentum space if, and only if, a combination  $\Delta(t, \gamma)$  of the two coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  and  $D(t, \gamma)$  satisfies a certain differential equation; this equation is thus a curved space-time fluctuation-dissipation theorem in differential form. The integral form of the theorem is obtained in Sec. IV C and is an exact literal expression for  $\Delta(t, \gamma)$ . This expression is the sum of two terms. The first one is a time-dependent entire series in  $1/\gamma$ . The second term involves the exponential integral function  $Ei$ , taken at  $mc^2\gamma/k_B T(t)$  (where  $m$  is the mass of the diffusing particle). Our results are finally summarized and discussed in Sec. V, where we also mention possible interesting developments.

## II. THE SPECIAL RELATIVISTIC ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS

The special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process models the stochastic dynamics of a point particle diffusing in flat space-time because of its interaction with an isotropic fluid characterized by a 4-velocity field  $U$ .

Suppose  $U$  is uniform. The fluid then admits a global proper frame  $\mathcal{R}$ . The stochastic differential equations defining the process read in this frame<sup>3</sup>

$$d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})} dt, \quad (1)$$

$$d\mathbf{p} = -\alpha \frac{\mathbf{p}}{\gamma(\mathbf{p})} dt + \sqrt{2D} d\mathbf{B}_t,$$

where  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{p}$  are the position and momentum of the particle, and  $\mathbf{B}_t$  is the usual three-dimensional Brownian motion. The Lorentz factor  $\gamma$  reads in terms of  $\mathbf{p}$

$$\gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/m^2c^2}. \quad (2)$$

The coefficient  $\alpha$  fixes the amplitude of the frictional force, while the coefficient  $D$  gives the amplitude of the noise.

The forward Kolmogorov equation corresponding to Eq. (2) and obeyed by the phase-space distribution  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  (defined with respect to  $d^3x d^3p$ ) of the diffusing particle is<sup>3</sup>

$$\partial_t \Pi + \partial_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) - \alpha \partial_{\mathbf{p}} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = D \Delta_{\mathbf{p}} \Pi. \quad (3)$$

The process admits as an invariant measure in  $\mathbf{p}$ -space the Jüttner equilibrium distribution

$$\Pi_J(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{Q^2 K_2(1/Q^2)} \exp\left(-\frac{\gamma(\mathbf{p})}{Q^2}\right), \quad (4)$$

where  $K_2$  is the second-order modified Hankel function and  $Q^2 m^2 c^2 = D/\alpha$ . The distribution  $\Pi_J$  is normalized to unity with respect to the measure  $d^3p$ . The factor  $Q^2$  is interpreted as  $k_B T/mc^2$ , where  $T$  is the point-independent equilibrium temperature of the surrounding fluid. One thus has

$$\alpha = \frac{D}{mk_B T}, \quad (5)$$

which is a *bona fide* special relativistic fluctuation-dissipation theorem.

By Lorentz transforming all quantities involved in Eq. (2), one can derive the stochastic equations of motion of the diffusing particle in an arbitrary Lorentz frame.<sup>1</sup> One can then obtain out of these stochastic equations the forward Kolmogorov equation associated to the process in any Lorentz frame. Equations (2) and (3) therefore define the process in all Lorentz frames,<sup>1</sup> which makes this formulation of the ROUP perfectly covariant.

A manifestly covariant treatment of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process has been developed in Ref. 2 and has been used in Ref. 4 to construct a minimal extension of this process to curved space-time. The next section reviews the main properties of this minimal extension.

### III. A MINIMAL EXTENSION OF THE SPECIAL RELATIVISTIC ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS TO CURVED SPACE-TIME

#### A. Definition of the process

A manifestly covariant formulation of relativistic diffusion is achieved by working off the mass-shell; the standard six-dimensional (6D) phase-space is then replaced by an extended 8D phase-space  $\mathcal{S}$  that is best chosen as part of the bundle cotangent to space-time (naturally, the choice of  $\mathcal{S}$  also ensures that, at any point of space-time, the fiber of  $\mathcal{S}$  contains the mass-shell. The reader is referred to Ref. 4 for a precise definition of  $\mathcal{S}$ ). Any atlas of the space-time can be used to construct an atlas of  $\mathcal{S}$  and coordinates in the extended phase-space will be hereafter designated by  $(x, q)$ ; note that we hereby introduce the notation  $q$ , which will be used in the rest of this article to designate covariant momenta.

Statistics in the extended phase-space are described by a scalar distribution function  $\mathcal{F}$ . Given an arbitrary coordinate system, the distribution  $\mathcal{F}$  is related to the physical distribution function  $\Pi$  to be used in this system by an equation of the form

$$\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x, q) \delta(q_0 - mc\gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{q})) dq_0, \quad (6)$$

where the  $\delta$ -distribution enforces a mass-shell restriction. Integrating  $\Pi$  against  $d^3q/\sqrt{-\det g}$  delivers the spatial density  $n(\mathbf{x}, t)$ , which can in turn be integrated against  $d^3x\sqrt{-\det g}$ . Further details over the measures against which  $\Pi$  can be integrated can be found in Ref. 4.

A curved space-time generalization of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process is then fully defined by a forward Kolmogorov equation obeyed by the function  $\mathcal{F}$ . There naturally exists an infinite number of such possible generalizations; the process introduced in Ref. 4 is defined by the simplest possible one; it reads

$$\mathcal{D}_\mu(g^{\mu\nu}(x)p_\nu\mathcal{F}) + \frac{\partial}{\partial p_\mu}(mcF_{d\mu}\mathcal{F}) + DK^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu\partial_{p_\rho}\left(\frac{p_\mu p_\beta}{p_\alpha U^\alpha}\partial_{p_\nu}\mathcal{F}\right) = 0, \quad (7)$$

where  $\mathcal{D}$  stands for the covariant derivative with respect to the position at momentum *covariantly* constant

$$\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\nu}; \quad (8)$$

here, the  $\Gamma$ 's are the usual Christoffel symbols of the space-time metric  $g$ . The deterministic force  $F_d$  is defined by

$$F_{d\mu} = -\lambda_{\mu\nu}^v \frac{g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{m^2 c^2} + \lambda^{\alpha\beta} \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2 c^2} p_\mu, \quad (9)$$

and the friction tensor  $\lambda$  reads

$$\lambda^{\mu\nu} = \alpha \frac{(mc)^2}{(p_\mu U^\mu)^2} \mathcal{P}^{\mu\nu}, \quad (10)$$

where  $\mathcal{P}$  is the projector onto the orthogonal to  $U$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu; \quad (11)$$

finally, the tensor  $K$  is defined in terms of  $\mathcal{P}$  and  $U$  by

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = U^\mu U^\beta \mathcal{P}^{\rho\nu} - U^\mu U^\nu \mathcal{P}^{\rho\beta} + U^\rho U^\nu \mathcal{P}^{\mu\beta} - U^\rho U^\beta \mathcal{P}^{\mu\nu}. \quad (12)$$

The manifestly covariant forward Kolmogorov equation for  $\mathcal{F}$  can be transcribed in each coordinate system of space-time into a covariant but not manifestly covariant transport equation for the physical distribution function  $\Pi$ . This transport equation for  $\Pi$  fully defines the process in this coordinate system.

## B. Application: Diffusion in a spatially flat FRW universe

We first recall the expression of the components of the space-time metric characterizing the spatially flat Friedmann-Robertson-Walker (FRW) universe in the usual comoving coordinates<sup>6</sup>

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = c^2 dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2. \quad (13)$$

The evolution of the expansion factor  $a(t)$  is fixed via Einstein's equation by the equation of state of the matter present in the universe and by suitable initial data.

The matter follows the expansion and is at rest in the comoving frame. The components of its 4-velocity  $U$  in the comoving frame are therefore

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (14)$$

Let  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{q})$  be the comoving frame distribution function of a particle whose interaction with the matter present in the universe is fixed by the stochastic process considered in Sec. III A. This function satisfies the following forward Kolmogorov equation:<sup>4</sup>

$$\partial_t \Pi = \frac{1}{a^2(t)} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{m\gamma(t, \mathbf{q})} \Pi \right) + \partial_{\mathbf{q}} \cdot \left( \alpha \frac{\mathbf{q}}{\gamma(t, \mathbf{q})} \Pi + Da^2(t) \partial_{\mathbf{q}} \Pi \right), \quad (15)$$

where the Lorentz factor  $\gamma(t, \mathbf{q})$  is given by

$$\gamma(t, \mathbf{q}) = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{a^2(t)m^2c^2}}. \quad (16)$$

The corresponding stochastic differential equations read

$$d\mathbf{x} = -\frac{1}{a^2(t)} \frac{\mathbf{q}}{m\gamma(t, \mathbf{q})} dt, \quad (17)$$

$$d\mathbf{q} = -\alpha \frac{\mathbf{q}}{\gamma(t, \mathbf{q})} dt + \sqrt{2Da(t)} d\mathbf{B}_t.$$

Let us define the marginal  $\bar{\Pi}(t, \mathbf{q})$  by

$$\bar{\Pi}(t, \mathbf{q}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}) d^3x; \quad (18)$$

the distribution  $\bar{\Pi}$  satisfies the transport equation

$$\partial_t \bar{\Pi} = + \partial_{\mathbf{q}} \cdot \left( \alpha \frac{\mathbf{q}}{\gamma(t, \mathbf{q})} \bar{\Pi} + Da^2(t) \partial_{\mathbf{q}} \bar{\Pi} \right). \quad (19)$$

Unlike its Galilean and special relativistic counterparts, the process defined by Eq. (17) is not time homogeneous. In particular, Eq. (19) does not generally admit time-independent solutions. Perturbative expressions for solutions of Eq. (19) have, however, been found<sup>4</sup> in the case where the characteristic expansion time-scale is much larger than the characteristic relaxation time  $1/\alpha$  of the process. When  $a(t)=1$ , i.e., in flat space-time, these solutions reduce to the Jüttner equilibrium distribution of temperature  $T_{\text{flat}}=D/\alpha mk_B$ , but, for a general  $a(t)$ , these solutions do not coincide with any time-dependent Jüttner distribution and there is therefore no time-dependent temperature naturally associated with the diffusion. This represents, however, a serious physical limitation of the minimally extended process introduced in Ref. 4 because the thermodynamical state of the matter in the universe *can*, to a very good approximation, be characterized by a time-dependent temperature  $T(t)$ .<sup>6</sup> This limitation comes from the fact that the process (17), as a minimal extension of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process, uses *constant* friction and noise coefficients  $\alpha$  and  $D$  to characterize the interaction of the diffusing particle with the surrounding fluid. This simple choice has, however, no physical justification if the thermodynamical state of the fluid surrounding the particle is not itself constant and, for example, can be characterized by a time-dependent temperature  $T(t)$ . More realistic models of diffusion in a FRW space-time have to take into account the time-dependence of the thermodynamical state of the fluid by allowing the coefficients  $\alpha$  and  $D$  to depend on time. The question that then naturally arises is: Are there non-minimal extensions of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process to spatially flat FRW space-times that do admit as possible densities Jüttner distributions associated to time-dependent temperatures? To this we now turn our attention.

#### IV. FLUCTUATION-DISSIPATION THEOREMS IN AN EXPANDING UNIVERSE

##### A. Non-minimal extensions of the ROUP in spatially flat FRW space times

We consider the following class of Ito processes:

$$d\mathbf{x} = -\frac{1}{a^2(t)} \frac{\mathbf{q}}{m\gamma(t, \mathbf{q})} dt,$$

$$d\mathbf{q} = -\alpha_I(t, \gamma) \frac{\mathbf{q}}{\gamma(t, \mathbf{q})} dt + \sqrt{2 D(t, \gamma) a(t)} d\mathbf{B}_t, \quad (20)$$

where  $(t, \mathbf{x})$  are comoving coordinates. In Eq. (20), the coefficients  $\alpha$  and  $D$  are allowed to depend on the comoving time  $t$  and on the adimensionalized energy  $\gamma$  of the particle. The physical distribution  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{q})$  associated with one of these processes obeys the following forward Kolmogorov equation:

$$\partial_t \Pi = \frac{1}{a^2(t)} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{m \gamma(t, \mathbf{q})} \Pi \right) + \partial_{\mathbf{q}} \cdot \left( \alpha(t, \gamma) \frac{\mathbf{q}}{\gamma} \Pi + D(t, \gamma) a^2(t) \partial_{\mathbf{q}} \Pi \right), \quad (21)$$

where  $\gamma(t, \mathbf{q})$  is given by Eq. (16) and

$$\alpha(t, \gamma) = \alpha_I(t, \gamma) + \frac{\partial \gamma D}{m^2 c^2}. \quad (22)$$

The marginal  $\bar{\Pi}$  of  $\Pi$  defined by Eq. (18) then obeys the transport equation

$$\partial_t \bar{\Pi} = + \partial_{\mathbf{q}} \cdot \left( \alpha(t, \gamma) \frac{\mathbf{q}}{\gamma} \bar{\Pi} + D(t, \gamma) a^2(t) \partial_{\mathbf{q}} \bar{\Pi} \right). \quad (23)$$

Note that the normalization condition  $\int_{\mathbb{R}^3} \bar{\Pi}(t, \mathbf{q}) d^3 q = 1$  is conserved in time by this equation.

## B. Differential form of the fluctuation-dissipation theorems

The time-dependent Jüttner distribution  $\Pi_J(t, \mathbf{q})$  of temperature  $T(t)$  reads

$$\Pi_J(t, \mathbf{q}) = N(t) \exp(-\beta(t) \gamma(t, \mathbf{q})), \quad (24)$$

with  $\beta(t) = mc^2 / k_B T(t)$ . The function  $N(t)$  is determined by the normalization of  $\Pi_J(t, \mathbf{q})$ . We have

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Pi_J(t, \mathbf{q}) d^3 q = 1, \quad (25)$$

which yields

$$N(t) = \frac{1}{4\pi a^3(t) (mc)^3} \frac{\beta(t)}{K_2(\beta(t))}. \quad (26)$$

We now impose the Jüttner distribution (24) to be solution of the forward Kolmogorov equation (23):

$$\partial_t \Pi_J = \partial_{\mathbf{q}} \cdot \left( \alpha(t, \gamma) \frac{\mathbf{q}}{\gamma} \Pi_J + D(t, \gamma) a^2(t) \partial_{\mathbf{q}} \Pi_J \right), \quad (27)$$

and we consider (27) as a constraint on the coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  and  $D(t, \gamma)$  that define the non-minimal extensions we wish to construct. We start by computing the left-hand side of Eq. (27), using (24) and (26). We get

$$\partial_t \Pi_J = \Pi_J \left( \frac{\dot{N}}{N} - \dot{\beta} \gamma - \beta \partial_t \gamma \right), \quad (28)$$

where a dot denotes the derivative of a function of  $t$ . We have from (26)



$$\frac{\dot{N}}{N} = -3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \dot{\beta} \frac{K'_2(\beta)}{K_2(\beta)} \quad (29)$$

and

$$\partial_t \gamma = -\frac{1}{\gamma} \frac{\mathbf{q}^2}{a^2(t)(mc)^2} \frac{\dot{a}}{a}; \quad (30)$$

by using (16), this can be rewritten as

$$\partial_t \gamma = -\frac{1}{\gamma} (\gamma^2 - 1) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (31)$$

Plugging (29) and (31) into (28) leads to

$$\partial_t \Pi_J = \left( A_1(t) + A_2(t) \gamma + A_3(t) \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) \Pi_J, \quad (32)$$

with

$$A_1(t) = -3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \dot{\beta} \frac{K'_2(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad (33)$$

$$A_2(t) = -\dot{\beta}, \quad (34)$$

and

$$A_3(t) = \beta \frac{\dot{a}}{a}. \quad (35)$$

We now define the function  $\Delta$  by

$$\Delta(t, \gamma) = \alpha(t, \gamma) - \frac{\beta(t)D(t, \gamma)}{m^2 c^2}, \quad (36)$$

and express the right-hand side  $\rho(t, \gamma)$  of (27) in terms of  $\Delta$ ; one finds

$$\rho(t, \gamma) = \frac{\Pi_J \Delta}{\gamma} \partial_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} + \frac{\Pi_J}{\gamma} \mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} \Delta + \frac{\Delta}{\gamma} \mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} \Pi_J + \Delta \Pi_J \mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} \frac{1}{\gamma}. \quad (37)$$

Expression  $\mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} \Delta$  can be rewritten in terms of  $\gamma$  by deriving (16) with respect to  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} \Delta = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \partial_{\gamma} \Delta. \quad (38)$$

Immediate calculations also yield  $\mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} \Pi_J = -\beta[(\gamma^2 - 1)/\gamma] \Pi_J$  and  $\mathbf{q} \cdot \partial_{\mathbf{q}} (1/\gamma) = -[(\gamma^2 - 1)/\gamma^3]$ . One thus finds

$$\rho(t, \gamma) = \Pi_J \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \left( \partial_{\gamma} \Delta + \Delta \left( \frac{3\gamma}{\gamma^2 - 1} - \beta - \frac{1}{\gamma} \right) \right). \quad (39)$$

Plugging (32) and (38) into (27), we finally get

$$\partial_{\gamma} \Delta + f(t, \gamma) \Delta = g(t, \gamma), \quad (40)$$

with

$$f(t, \gamma) = \frac{3}{\gamma^2 - 1} \gamma - \beta(t) - \frac{1}{\gamma} \quad (41)$$

and

$$g(t, \gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left( A_1(t) + A_2(t) \gamma + A_3(t) \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right). \quad (42)$$

The above calculation shows that the Jüttner distribution (24) is a solution of (21) if and only if the coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  and  $D(t, \gamma)$ , which define the diffusion process and the equilibrium temperature  $T(t)$ , satisfy relation (40). Equation (40) is therefore a fluctuation-dissipation theorem in differential form.

In flat Minkowski space-time and for a constant temperature  $T$ ,  $\dot{a} = \dot{\beta} = 0$  and  $a = 1$ ; this implies  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$  and (40) degenerates into  $\partial_\gamma \Delta + f(\gamma) \Delta = 0$  (note that  $f$  is then time-independent). This differential equation can easily be integrated explicitly and the only solution that does not diverge when  $\gamma$  approaches unity, i.e., when  $\mathbf{p}$  approaches zero, is  $\Delta = 0$ ; the flat space-time fluctuation-dissipation theorem (5) presented in Sec. II is then recovered by choosing  $\alpha$  and  $D$  independent of  $t$  and  $\gamma$ ; remark, however, that this simple choice is clearly not the only one, even in flat space-time.

Relation (40) is an ordinary first-order differential equation with  $t$ - and  $\gamma$ -dependent coefficients  $f$  and  $g$ . In any arbitrary spatially flat universe, the function  $f$  depends on  $t$  via the inverse adimensionalized temperature  $\beta$  characterizing the state of the fluid present in the universe, while the comoving time dependency of  $g$  is induced not only by  $\beta$  but also by the purely geometric quantity  $\dot{a}/a$ . [The ratio  $\dot{a}/a$  can be indeed expressed in terms of the Ricci tensor  $R$  of the space-time through the relation

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{6} (2R_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - \mathcal{P}_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) - R), \quad (43)$$

with  $\mathcal{P}$  defined in Eq. (11). Note that this operator has a very simple geometric interpretation; it is indeed the projector onto the 3-surfaces of space-time invariant by the SO(3) symmetry group tracing for the spatial homogeneity and isotropy of the cosmological model.] Hence, the function  $\Delta$ , obtained by integrating (40) in  $\gamma$ , will depend on  $t$  through the functions  $a(t)$  and  $\beta(t)$ , which are chosen to describe the geometry and the matter content of the space-time.

The above discussion highlights the fact that there exist two different timescales involved in this problem: the Hubble time  $a/\dot{a} = H^{-1}$  of the expansion and the characteristic timescale  $\beta/\dot{\beta}$  associated with the evolution of the thermodynamical state of the matter.

### C. Integral form of the fluctuation-dissipation theorems

Integrating the homogeneous equation  $\partial_\gamma \Delta^H(t, \gamma) + f(t, \gamma) \Delta^H(t, \gamma) = 0$  associated with (40) yields the general solution

$$\Delta_C^H(t, \gamma) = \mathcal{C}(t) \gamma (\gamma^2 - 1)^{-3/2} e^{\beta(t)\gamma}. \quad (44)$$

Note that, for any nonvanishing value of  $\mathcal{C}$ ,  $\Delta_C^H$  is not defined for  $\gamma = 1$  (i.e.,  $\mathbf{p} = 0$ ) and diverges as  $\gamma \rightarrow 1^+$ .

Any solution of the inhomogeneous equation (40) can be written as the sum of a function  $\Delta_C^H$  and of an arbitrary particular solution  $\Delta^P$  of (40). We write

$$\Delta^P(t, \gamma) = \Delta_0(t, \gamma) \gamma (\gamma^2 - 1)^{-3/2} e^{\beta(t)\gamma} \quad (45)$$

and insert this expression into (40); this leads to

$$\partial_\gamma \Delta_0 = e^{-\beta(t)\gamma} (\gamma^2 - 1)^{1/2} (A_1(t)\gamma + A_2(t)\gamma^2 + A_3(t)(\gamma^2 - 1)), \quad (46)$$

with  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$ , and  $A_3(t)$  defined by (33)–(35). The rest of this section is devoted to finding the exact literal expression of a particular  $\Delta_0$  satisfying (46).

This can be accomplished by performing a series expansion of Eq. (46) in powers of  $1/\gamma^2$ . To do so, we first rewrite (46) as

$$\partial_\gamma \Delta_0 = \gamma^3 e^{-\beta\gamma} \left( \frac{A_1}{\gamma} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2} + A_2 + A_3 \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{3/2} \right). \quad (47)$$

The functions  $[1 - (1/\gamma^2)]^{1/2}$  and  $[1 - (1/\gamma^2)]^{3/2}$  can be expanded in powers of  $1/\gamma^2$ , and the expressions converge for all values of  $\gamma \neq 1$ . The series expansion of (47) reads

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \Delta_0 = & (A_2 + A_3) \gamma^3 e^{-\beta\gamma} + A_1 \gamma^2 e^{-\beta\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} A_1 \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1) (-1)^k}{k!} \frac{e^{-\beta\gamma}}{\gamma^{2k-2}} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_2 \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1) (-1)^k}{k!} + A_3 \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1) \dots (\frac{3}{2} - k + 1) (-1)^k}{k!} \right) \frac{e^{-\beta\gamma}}{\gamma^{2k-3}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Rewriting the sums and putting together the first terms of each sum, which can be integrated straightforwardly, yields

$$\partial_\gamma \Delta_0 = (A_2 + A_3) \gamma^3 e^{-\beta\gamma} + A_1 \gamma^2 e^{-\beta\gamma} - \frac{1}{2} (3A_3 + A_2) \gamma e^{-\beta\gamma} - \frac{A_1}{2} e^{-\beta\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{e^{-\beta\gamma}}{\gamma^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) \frac{e^{-\beta\gamma}}{\gamma^{2k+1}}, \quad (49)$$

where the coefficients  $b_k$ ,  $c_k$ , and  $d_k$  are given by

$$\begin{aligned} b_k &= A_1 \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - k \right), \\ c_k &= A_2 \frac{(-1)^k}{(k+2)!} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - k \right), \\ d_k &= A_3 \frac{(-1)^k}{(k+2)!} \left( \frac{3}{2} - 1 \right) \left( \frac{3}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{3}{2} - k \right). \end{aligned} \quad (50)$$

A solution  $\Delta_0^S$  of (49) then reads

$$\Delta_0^S = (A_2 + A_3) I_1 + A_1 I_2 - \frac{1}{2} (3A_3 + A_2) I_3 - \frac{A_1}{2} I_4 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_k + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) \tilde{J}_k, \quad (51)$$

with

$$I_1(t, \gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} \gamma'^3 e^{-\beta\gamma'} d\gamma',$$

$$I_2(t, \gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} \gamma'^2 e^{-\beta\gamma'} d\gamma',$$

$$I_3(t, \gamma) = \int_{\infty}^{\gamma} \gamma' e^{-\beta \gamma'} d\gamma',$$

$$I_4(t, \gamma) = \int_{\infty}^{\gamma} e^{-\beta \gamma'} d\gamma', \quad (52)$$

which give

$$I_1(t, \gamma) = -\frac{e^{-\beta(t)\gamma}}{\beta^4(t)}(\beta^3(t)\gamma^3 + 3\beta^2(t)\gamma^2 + 6\beta(t)\gamma + 6),$$

$$I_2(t, \gamma) = -\frac{e^{-\beta(t)\gamma}}{\beta^3(t)}(\beta^2(t)\gamma^2 + 2\beta(t)\gamma + 2),$$

$$I_3(t, \gamma) = -\frac{e^{-\beta(t)\gamma}}{\beta^2(t)}(\beta(t)\gamma + 1),$$

$$I_4(t, \gamma) = -\frac{e^{-\beta(t)\gamma}}{\beta(t)}, \quad (53)$$

and

$$J_k(t, \gamma) = \int_{\infty}^{\gamma} \frac{e^{-\beta(t)\gamma'}}{\gamma'^{2k}} d\gamma', \quad (54)$$

$$\tilde{J}_k(t, \gamma) = \int_{\infty}^{\gamma} \frac{e^{-\beta(t)\gamma'}}{\gamma'^{2k+1}} d\gamma'. \quad (55)$$

Both above integrals can be expressed in the form of series expansions for  $\gamma \neq 1$  (Ref. 5):

$$J_k = -e^{-\beta\gamma} \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{v_j}{\gamma^{2k-j}} + \frac{(-\beta)^{2k-1}}{(2k-1)!} \text{Ei}(-\beta\gamma), \quad (56)$$

with

$$v_j = \frac{(-\beta)^{j-1}}{(2k-1)(2k-2) \dots (2k-j)}, \quad (57)$$

and

$$\tilde{J}_k = -e^{-\beta\gamma} \sum_{j=1}^{2k} \frac{\tilde{v}_j}{\gamma^{2k+1-j}} + \frac{(-\beta)^{2k}}{(2k)!} \text{Ei}(-\beta\gamma), \quad (58)$$

with

$$\tilde{v}_j = \frac{(-\beta)^{j-1}}{2k(2k-1) \dots (2k+1-j)}. \quad (59)$$

In (56) and (58), Ei is the exponential integral function, defined by<sup>5</sup>

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-x'}}{x'} dx', \quad x < 0. \quad (60)$$

The function  $\Delta_0^S$  is defined for all values of  $\gamma \neq 1$ ; since the right-hand side of (46) tends towards 0 as  $\gamma$  approaches unity, all solutions of (46) are actually well behaved and therefore defined at  $\gamma=1$ . The solution of (46) which coincides with  $\Delta_0^S$  for all values of  $\gamma \neq 1$ , will from now on be simply designated by  $\Delta_0$ . Let us characterize further the behavior of  $\Delta_0$  near  $\gamma=1$ . A direct expansion of (46) in powers of  $x=(\gamma^2-1)^{1/2}$  leads to

$$\partial_x \tilde{\Delta}_0 = e^{-\beta(t)} (A_1(t) + A_2(t)) x^2 + O(x^4), \quad (61)$$

where  $\tilde{\Delta}_0(t, x) = \Delta_0(t, (x^2+1)^{1/2})$ . Integrating this expression yields

$$\tilde{\Delta}_0(t, x) = \Delta_0(t, 1) + e^{-\beta(t)} \frac{(A_1(t) + A_2(t))}{3} x^3 + O(x^5) \quad (62)$$

or, in terms of  $\gamma$ ,

$$\Delta_0(t, \gamma) = \Delta_0(t, 1) + e^{-\beta(t)} \frac{(A_1(t) + A_2(t))}{3} (\gamma^2 - 1)^{3/2} + O((\gamma^2 - 1)^{5/2}). \quad (63)$$

Now, for any solution  $\Delta$  of (40), one can find a function  $\mathcal{C}$  such that, for all values of  $\gamma \neq 1$ ,

$$\Delta_{\mathcal{C}}(t, \gamma) = (\mathcal{C}(t) + \Delta_0(t, \gamma)) \gamma (\gamma^2 - 1)^{-3/2} e^{\beta(t) \gamma}. \quad (64)$$

Physics dictates that  $\Delta$  itself, and not only  $\Delta_0$ , remains finite as  $\gamma$  approaches unity (i.e., as  $\mathbf{p}$  approaches zero). Plugging (63) into (64) leads to

$$\Delta_{\mathcal{C}}(t, \gamma) = (\mathcal{C}(t) + \Delta_0(t, 1)) \gamma (\gamma^2 - 1)^{-3/2} e^{\beta(t)} + \frac{(A_1(t) + A_2(t))}{3} + O((\gamma^2 - 1)). \quad (65)$$

Choosing  $\mathcal{C}(t) = -\Delta_0(t, 1)$  clearly ensures that the corresponding  $\Delta$  remains finite for  $\gamma=1$ . The function  $\Delta_{-\Delta_0(t, 1)}$  is therefore the unique physically relevant solution of (40).

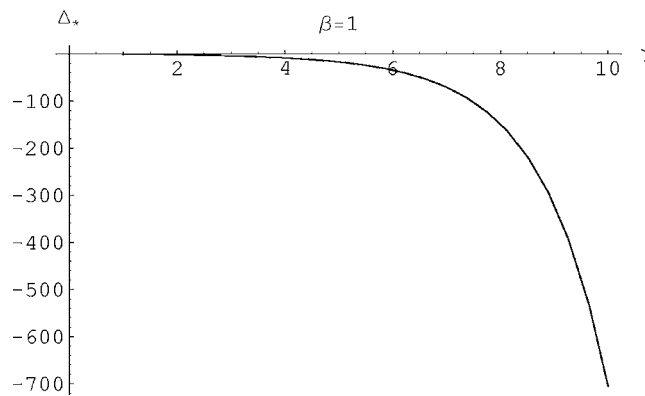
As indicated at the end of the previous section, the time-dependence of any solution of (40) and, in particular, the time-dependence of  $\Delta_{-\Delta_0(t, 1)}$ , is governed by  $\beta(t)$  and by  $a(t)$ . Except at very early epochs, the inverse adimensionalized temperature  $\beta(t)$  of our universe is roughly proportional to the expansion factor  $a(t)$  (Ref. 6); in this approximation, the Hubble time  $H^{-1} = a/\dot{a} = \beta/\dot{\beta}$  is the only time-scale of the problem, and the natural interesting quantity is then the adimensionalized product  $\Delta_*(t, \gamma) = H^{-1}(t) \Delta_{-\Delta_0(t, 1)}(t, \gamma)$ .

The dependence of  $\Delta_*$  on  $\gamma$  is qualitatively similar for all values of  $t$  (or  $\beta$ ), and a typical result is presented in Fig. 1.

The fact that  $\Delta_*$  is always negative admits a very simple physical interpretation. It means indeed that, for all  $(t, \mathbf{q})$  and for any arbitrarily given value of the friction coefficient  $\alpha(t, \gamma(t, \mathbf{q}))$ , the amplitude of the noise needed to ensure thermal “equilibrium” at temperature  $T(t)$  has to be greater in an expanding universe than in flat space-time. On the contrary, in a contracting universe, the quantity  $H^{-1} = a/\dot{a}$  would be negative, and a negative  $\Delta_*$  would then correspond to a positive  $\Delta$ ; for any arbitrarily given value of  $\alpha$ , the amplitude of the noise needed to ensure thermal equilibrium would then be smaller than in flat space-time.

## V. CONCLUSION

Let us start by briefly summarizing our results. The thermodynamical state of the matter content of our universe can be characterized by a time-dependent temperature  $T(t)$ . Any stochastic process modeling the diffusion of a point particle interacting with this matter should therefore admit the time-dependent Jüttner distribution of temperature  $T(t)$  as a possible measure in mo-

FIG. 1. Evolution of  $\Delta_*(t, \gamma)$  vs  $\gamma$  for  $\beta=1$ .

mentum space. This is not the case for the minimal curved space-time extension of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. We have therefore introduced a class of new, non-minimal extensions of this process that all admit, in an expanding homogeneous and isotropic universe, the Jüttner distribution of temperature  $T(t)$  as a possible measure in momentum space. These extensions are characterized by a friction and a noise coefficients, which both depend on the energy of the diffusing particle and on the comoving time  $t$ ; the time-dependence of these coefficients reflects the time-dependence of the thermodynamical state of the matter surrounding the diffusing particle; let us also note that this time-dependence can be rephrased as a dependence on the Ricci tensor of the space-time manifold.

The two coefficients  $\alpha(t, \gamma)$  and  $D(t, \gamma)$  and the temperature  $T(t)$  obey a single differential equation that can be considered as the differential form of a fluctuation-dissipation theorem for the considered process. We have integrated this equation literally and have thus obtained an exact integral form of the fluctuation-dissipation theorem.

The work presented in this article can be extended into various extensions. First, one should systematically consider various astrophysical or cosmological situations where the thermodynamical state of the matter present in space-time can be adequately modeled by the introduction of a temperature field, and investigate if one can always construct stochastic processes in these space-times, which admit the associated Jüttner distribution as a possible measure in momentum space. For example, can one prove fluctuation-dissipation theorems for diffusions inside a relativistic star, or in a nonhomogeneous universe? And, if that is indeed the case, on which field characterizing the geometry of the space-time do the corresponding processes depend? In particular, for which space-times and/or temperature fields is it enough to consider a dependence on the Ricci tensor, and not on the full Riemann (or curvature) tensor?

In a different direction, one should investigate if a theorem similar to the  $H$ -theorem recently proved<sup>7</sup> for the minimal extension of the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process can be obtained for the non-minimal extensions considered in the present article and, more generally, for other curved space-time extensions verifying physically interesting fluctuation-dissipation theorems.

<sup>1</sup>Barbachoux, C., Debbasch, F., and Rivet, J. P., "The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame," *Eur. Phys. J. B* **19**, 37 (2001).

<sup>2</sup>Barbachoux, C., Debbasch, F., and Rivet, J. P., "Covariant Kolmogorov equation and entropy current for the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process," *Eur. Phys. J. B* **23**, 487 (2001).

<sup>3</sup>Debbasch, F., Mallick, K., and Rivet, J. P., "Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process," *J. Math. Phys.* **88**, 945 (1997).

<sup>4</sup>Debbasch, F., "A diffusion process in curved space-time," *J. Math. Phys.* **45**, 2744 (2004).

<sup>5</sup>Gradshteyn, L. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, 6th ed. (Academic, New York, 2000).

<sup>6</sup>Kolb, E. W. and Turner, M. S., *The Early Universe*, Frontiers in Physics (Addison-Wesley, Redwood City, 1990).

<sup>7</sup>Rigotti, M. and Debbasch, F., "An H-theorem for the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in curved space-time," *J. Math. Phys.* **46**, 103303 (2005).

C. Chevalier and F. Debbasch: Relativistic diffusions: a unifying approach. *Submitted to J. Math. Phys.* ([27]).

# Relativistic diffusions: a unifying approach

C. Chevalier and F. Debbasch

Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA,  
3 rue Galilée 94200 Ivry, France.

September 4, 2007

## Abstract

A new, wide class of relativistic stochastic processes is introduced. All relativistic processes considered so far in the literature are members of this class. For each process, the stochastic equations of motion are obtained in an arbitrary Lorentz frame. The associated Kolmogorov equation is also derived for the first time, in both  $(3 + 1)$ - and manifestly covariant forms.

## Notations

In this article, we set both the velocity of light  $c$  and the mass  $m$  of the diffusing particle equal to one. The signature of the space-time Lorentzian metric is chosen to be  $(+, -, -, -)$ .

## 1 Introduction

It is probably fair to say that Stochastic Process Theory originated with Einstein's 1905 study on Brownian motion [15]. The theory has since developed into a full grown branch of Mathematics [24, 26] and its current applications include Physics and Chemistry [30, 18], Biology [25, 1, 20, 14] and Economics [28, 29]. As far as Physics is concerned, one had to wait until the 70's to see what started as an attempt to describe non quantum Galilean diffusions being extended to include Galilean quantum processes [30, 19]; but the wait for a relativistic extension was even longer, since the first paper dealing with a relativistic stochastic process of clear physical interpretation was only published in 1997 [5]. Several different relativistic stochastic processes have since then been considered by various authors [16, 12, 13, 17, 9, 2], sometimes with extremely different and seemingly irreconcilable points of view. It is the aim of the present article to develop a unified approach towards all these processes. We show indeed that all these processes are particular members of a wide family of generalized relativistic Ornstein-Uhlenbeck processes; this class is characterized by a simple property obeyed by the stochastic force entering the definition of the processes. More precisely, for each process in the class, and for each point on the phase-space trajectory of the diffusing particle, there exists a Lorentz frame in which the stochastic force acting on the particle is a Gaussian white noise.

The gaps in the present literature are filled by providing, for all processes in the class, the stochastic equations of motion in an arbitrary Lorentz frame and the associated transport equations, in both standard  $(3 + 1)$  and manifestly covariant form. In par-



ticular, a manifestly covariant treatment of the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi processes is given here for the first time.

## 2 Basics

### 2.1 A natural way to define relativistic diffusions

Let  $\mathcal{S}$  be the space-time manifold, equipped with metric  $g$  and the Levi-Civita connection  $\nabla$  associated to  $g$ . The phase space of a point particle is the 7-D submanifold of the cotangent bundle defined by the relation  $p \cdot p = 1$ , where  $p$  stands for the 4-momentum of the particle; this bundle is usually called the mass-shell bundle [31] and will be denoted hereafter by  $\mathcal{M}$ . Let  $b^a(M)$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ , be, for all  $M \in \mathcal{S}$ , a basis of the space cotangent to  $\mathcal{S}$  at  $M$ ; we take  $b^0 \cdot b^0 > 0$  and  $b^{\hat{a}} \cdot b^{\hat{a}} < 0$  for  $\hat{a} = 1, 2$  and 3. Let also  $C$  be a chart of  $\mathcal{S}$ , with coordinates  $(x) = (t, \mathbf{x})$ , where  $\mathbf{x}$  stands for  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (we suppose here, to simplify the discussion, that  $\mathcal{S}$  can be covered by single chart atlases); the family of basis  $b^{\hat{a}}$  and the chart  $C$  induce a (global) chart  $C_{\mathcal{M}}$  on  $\mathcal{M}$ , with coordinates  $Z = (Z^k) = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , where  $\mathbf{p}$  represents the three ‘spatial’ momentum components  $p_{\hat{a}}$ ,  $\hat{a} = 1, 2, 3$ .

Consider in  $C_{\mathcal{M}}$  a set of stochastic differential equations of the form:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= v^i(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dt \\ dp_{\hat{a}, t} &= {}^{(S)}\phi_{\hat{a}}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dt + \sigma_{\hat{a}\hat{b}}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) dB_t^{\hat{b}}, \end{aligned} \quad (1)$$

where the exponent  $(S)$  means that these equations are to be understood in the Stratonovich sense and  $B_t^1, B_t^2$  and  $B_t^3$  are three independent 1-D Brownian motions. We suppose that the functions  $v^i$  are chosen to ensure that the 4-vector  $p$  associated to  $p_{\hat{a}}$  coincides with the derivative  $dM/ds$  of the space-time position of the point particle with respect to the proper time  $s$ . The diffusion in  $\mathbf{p}$ -space is then a generalized Ornstein-Uhlenbeck process and the diffusion in  $\mathbf{x}$ -space represents the induced spatial trajectory of the point particle, indexed by the time coordinate  $t$ .

We will now show that the form of (1) is stable under changes of coordinates which do not mix space-time and momenta degrees of freedom; equations (1) thus define an intrinsic Ornstein-Uhlenbeck process in phase space. Let us start by rewriting the system (1) as:

$$dZ_t^k = {}^{(S)}\Phi^k(Z_t) dt + \Sigma_l^k(Z_t) d\mathcal{B}_t^l, \quad (2)$$

with

$$\begin{aligned} {}^{(S)}\Phi^0 &= 1 \\ {}^{(S)}\Phi^k &= v^k, & \text{if } k \in \{1, 2, 3\} \\ {}^{(S)}\Phi^k &= {}^{(S)}\phi_{k-3}, & \text{if } k \in \{4, 5, 6\} \\ \Sigma_l^k &= 0, & \text{if } (k, l) \notin \{4, 5, 6\}^2 \\ \Sigma_l^k &= \sigma_{(k-3)(l-3)}, & \text{if } (k, l) \in \{4, 5, 6\}^2 \\ \mathcal{B}_t^k &= 0, & \text{if } k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \mathcal{B}_t^k &= B_t^{k-3}, & \text{if } k \in \{4, 5, 6\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Consider now another chart  $C'_{\mathcal{M}}$  of  $\mathcal{M}$ , with coordinates  $(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}')$ . and perform a coordinate transformation on the Stratonovich equations (2). One gets:

$$dZ_t'^k = {}^{(S)}\tilde{\Phi}'^k(Z_t') dt + \tilde{\Sigma}_l'^k(Z_t') d\mathcal{B}_t'^l, \quad (4)$$

with

$${}^{(S)}\tilde{\Phi}'^k(Z'_t) = \frac{\partial Z'^k}{\partial Z^l} \Big|_{Z'_t} {}^{(S)}\Phi^l(Z_t(Z'_t)), \quad (5)$$

and

$$\tilde{\Sigma}'^k_l(Z'_t) = \frac{\partial Z'^k}{\partial Z^m} \Big|_{Z'_t} \frac{\partial Z^m}{\partial Z'^l} \Big|_{Z'_t} \Sigma^m_n(Z_t(Z'_t)). \quad (6)$$

The set of Itô stochastic equations corresponding to (4) is ([26]):

$$dZ'^k_t = {}^{(I)}\tilde{\Phi}'^k(Z'_t)dt + \tilde{\Sigma}'^k_l(Z'_t)d\mathcal{B}^l_t, \quad (7)$$

with

$${}^{(I)}\tilde{\Phi}'^k = {}^{(S)}\tilde{\Phi}'^k + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial \tilde{\Sigma}'^k_l}{\partial Z'^m} \tilde{\Sigma}'^m_l. \quad (8)$$

Perform now a random time-change characterized by  $dt' = A^{-1}(Z'_t)dt$ , where we have, from equation (7),  $A^{-1} = {}^{(I)}\Phi'^0$ . One obtains ([26]) the following set of Itô stochastic equations:

$$dZ'^k_{t'} = {}^{(I)}\Phi'^k(Z'_{t'})dt' + \Sigma'^k_l(Z'_{t'})d\mathcal{B}^l_{t'}, \quad (9)$$

where

$${}^{(I)}\Phi'^k = A \cdot {}^{(I)}\tilde{\Phi}'^k, \quad (10)$$

and

$$\Sigma'^k_l = \sqrt{A} \tilde{\Sigma}'^k_l. \quad (11)$$

The Stratonovich process associated to (9) is:

$$dZ'^k_{t'} = {}^{(S)}\Phi'^k(Z'_{t'})dt' + \Sigma'^k_l(Z'_{t'})d\mathcal{B}^l_{t'}, \quad (12)$$

with

$${}^{(S)}\Phi'^k = {}^{(I)}\Phi'^k - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial \Sigma'^k_l}{\partial Z'^m} \Sigma'^m_l. \quad (13)$$

For physical reasons, we now restrict our attention to coordinate changes on  $\mathcal{M}$  which do not mix space-time and momentum coordinates. The matrix  $(\partial Z'^k / \partial Z^l)$  is then block diagonal and (6) and (11) show that  $\tilde{\Sigma}'^k_l$  vanishes if  $(k, l) \notin \{4, 5, 6\}^2$ ; (12) has then the same structure as (2), the differentials  $d\mathcal{B}^l_{t'}$  appearing only in the stochastic equations obeyed by  $\mathbf{p}'$ . The form (2) is thus stable under physically meaningful coordinate changes on  $\mathcal{M}$  and equations (2) can therefore be used to define an intrinsic generalized Ornstein-Uhlenbeck process on  $\mathcal{M}$ . Note that  $\mathbf{x}'$  is necessarily the spatial position associated to  $\mathbf{p}'$  because the condition  $p = dx/ds$  is invariant under coordinate changes which do not mix space-time and momentum degrees of freedom.

## 2.2 A different way to define relativistic diffusions

Let us now show that the processes introduced above can be defined in another, more flexible way. Attach to all points  $Q \in \mathcal{M}$  a  $Q$ -dependent chart  $C^Q_{\mathcal{M}}$ , with associated coordinates  $(Z^Q) = (t^Q, \mathbf{x}^Q, \mathbf{p}^Q)$ . We assume that  $C^Q_{\mathcal{M}}$  depends smoothly on  $Q$ . More precisely, we assume that the application  $\mathcal{H}$  from  $\mathcal{M}^2$  to  $\mathbf{R}^7$ , which associates to any given couple  $(Q, R)$  of points in  $\mathcal{M}^2$  the coordinates of  $R$  in the chart  $C^Q_{\mathcal{M}}$  is at least  $C^2$  in  $Q$ .

Let  $\mathcal{P}$  be an arbitrary stochastic process of the class defined in Section 2.1. This process is represented in an arbitrary but given chart  $C_{\mathcal{M}}$  by a Stratonovich equation of the form:

$$dZ_t = {}^{(S)}\Phi(Z_t) dt + \Sigma(Z_t) d\mathcal{B}_t \quad (14)$$

Let now  $Q$  be an arbitrary point in  $\mathcal{M}$ . The process  $\mathcal{P}$  is represented in  $C_{\mathcal{M}}^Q$  by a Stratonovich equation:

$$dZ_{t^Q} = {}^{(S)}\Phi^Q(Z_{t^Q}) dt^Q + \Sigma^Q(Z_{t^Q}) d\mathcal{B}_{t^Q}. \quad (15)$$

The sets  $\{{}^{(S)}\Phi^Q(Z^Q(Q)), Q \in \mathcal{M}\}$  and  $\{\Sigma^Q(Z^Q(Q)), Q \in \mathcal{M}\}$  define two functions on  $\mathcal{M}$ , which we denote respectively by  ${}^{(S)}d$  and  $\mathfrak{D}$ .

We will now show that knowing  ${}^{(S)}d$  and  $\mathfrak{D}$  is equivalent to knowing the functions  $\Phi$  and  $\Sigma$ .

Indeed, given an arbitrary point  $Q \in \mathcal{M}$ , the process  $\mathcal{P}$  can also be represented by a Stratonovich equation of the form:

$$dZ_{t^Q} = {}^{(S)}_Q\Phi(Z_{t^Q}) dt^Q + {}_Q\Sigma(Z_{t^Q}) d\mathcal{B}_{t^Q}. \quad (16)$$

This equation is obtained from (15) by applying to the variable  $Z^Q$  a coordinate transformation from the chart  $C_{\mathcal{M}}^Q$  to the chart  $C_{\mathcal{M}}$ , but by conserving the time parameter  $t^Q$ ; one thus has:

$${}^{(S)}_Q\Phi^k(Z) = \frac{\partial Z^k}{\partial (Z^Q)^l} \Big|_{Z^Q} ({}^{(S)}\Phi^Q)^l(Z^Q(Z)) \quad (17)$$

and

$${}_Q\Sigma_l^k(Z_{t^Q}) = \frac{\partial Z^k}{\partial (Z^Q)^m} \Big|_{Z_{t^Q}} \frac{\partial (Z^Q)^n}{\partial Z^l} \Big|_{Z_{t^Q}} (\Sigma^Q)^m_n(Z_{t^Q}^Q(Z_{t^Q})). \quad (18)$$

Thus, knowing the functions  ${}^{(S)}d$  and  $\mathfrak{D}$  is equivalent to knowing the other two functions  ${}^{(S)}\delta$  and  $\Delta$  defined on  $\mathcal{M}$  by

$$\begin{aligned} {}^{(S)}\delta(Q) &= {}^{(S)}_Q\Phi(Z(Q)) \\ \Delta(Q) &= {}^{(S)}_Q\Sigma(Z(Q)) \end{aligned} \quad (19)$$

for all  $Q \in \mathcal{M}$ . We introduce for later convenience the two realizations  ${}^{(S)}\bar{\delta}$  and  $\bar{\Delta}$  of these functions in the chart  $C_{\mathcal{M}}$ ; these are defined by  ${}^{(S)}\bar{\delta}(Z) = {}^{(S)}\delta(C^{-1}(Z))$  and  $\bar{\Delta}(Z) = \Delta(C^{-1}(Z))$  for all  $Z \in \mathbb{R}^7$ .

We now need to perform a random time change to pass from (16) to (14). As indicated in Section 2.1, this can only be done on SDEs in the Itô form. The Itô form of (16) is characterized by a force function  ${}^{(I)}_Q\Phi$  defined by:

$${}^{(I)}_Q\Phi^k(Z) = {}^{(S)}_Q\Phi^k(Z) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial {}_Q\Sigma_l^k}{\partial Z^m} \Big|_Z {}_Q\Sigma_l^m(Z). \quad (20)$$

One thus has, for all  $Q$ 's:

$${}^{(I)}_Q\Phi^k(Z(Q)) = {}^{(S)}_Q\Phi^k(Z(Q)) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial {}_Q\Sigma_l^k}{\partial Z^m} \Big|_{Z(Q)} {}_Q\Sigma_l^m(Z(Q)). \quad (21)$$

Let us show that the value of  $\partial_Q \Sigma / \partial Z$  at  $Z(Q)$  can be obtained from the value of  $\partial \bar{\Delta} / \partial Z$  at  $Z(Q)$ .

One can write:

$$\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial Z} \Big|_{Z(Q)} = \lim_{\delta Z \rightarrow 0} \frac{{}_{Q+\delta Q} \Sigma(Z(Q) + \delta Z) - {}_Q \Sigma(Z(Q))}{\delta Z}, \quad (22)$$

where  $Q + \delta Q$  is a short-hand, evocative notation for the point of  $\mathcal{M}$  whose coordinates  $Z(Q + \delta Q)$  in the chart  $C$  are  $Z(Q) + \delta Z$ . The function  ${}_{Q+\delta Q} \Sigma$  is related to the function  ${}_Q \Sigma$  by a random time change, from  $t^{Q+\delta Q}$  to  $t^Q$ . One thus has:

$${}_{Q+\delta Q} \Sigma(Z) = {}_Q \Sigma(Z) \sqrt{\frac{dt^Q}{dt^{Q+\delta Q}} \Big|_Z}, \quad (23)$$

for all  $Z \in \mathcal{M}$ . Let us consider the function  $\rho$  defined on  $\mathbf{R}^3$  by:

$$\rho(Z_1, Z_2, Z_3) = \sqrt{\frac{dt^{Q_1}}{dt^{Q_2}} \Big|_{Z_3}}, \quad (24)$$

where  $Q_1$  and  $Q_2$  are the points of  $\mathcal{M}$  with respective coordinates  $Z_1$  and  $Z_2$  in  $C$ . This function does not depend on the stochastic process under consideration, but only on the family of charts  $\{C_{\mathcal{M}}^R, R \in \mathcal{M}\}$ ; in particular,  $\rho(Z_1, Z_2, Z_3)$  can be obtained by computing the coordinate change from  $C_{\mathcal{M}}^{Q_2}$  to  $C_{\mathcal{M}}^{Q_1}$  at the point  $C^{-1}(Z)$ . Since the charts  $C_{\mathcal{M}}^R$  depend smoothly on  $R$  one can write,

$$\rho(Z_1, Z_1 + \delta Z, Z_3) = \rho(Z_1, Z_1, Z) + \delta Z \cdot \mathcal{D}(Z_1, Z) + O((\delta Z)^2), \quad (25)$$

valid for all  $(Z_1, Z)$  and for sufficiently small  $\delta Z$ ; here

$$\mathcal{D}(Z_1, Z) = \frac{\partial \rho}{\partial Z_2} \Big|_{(Z_1, Z_1, Z)} \quad (26)$$

By definition,  $\rho(Z_1, Z_1, Z) = 1$  for all  $(Z_1, Z)$ . Inserting (25) in (23), one gets, for all  $Z \in \mathcal{M}$ :

$${}_{Q+\delta Q} \Sigma(Z) = {}_Q \Sigma(Z) \left[ 1 + \delta Z \cdot \mathcal{D}(Z(Q), Z) + O((\delta Z)^2) \right]; \quad (27)$$

in particular,

$$\begin{aligned} {}_{Q+\delta Q} \Sigma(Z(Q) + \delta Z) &= {}_Q \Sigma(Z(Q) + \delta Z) \left[ 1 + \delta Z \cdot \mathcal{D}(Z(Q), Z(Q) + \delta Z) + O((\delta Z)^2) \right] \\ &= {}_Q \Sigma(Z(Q)) [1 + \delta Z \cdot \mathcal{D}(Z(Q), Z(Q))] + \delta Z \cdot \frac{\partial {}_Q \Sigma}{\partial Z} \Big|_{Z(Q)} + O((\delta Z)^2) \end{aligned} \quad (28)$$

Combining the last equation with (22) leads, for all  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , to

$$\frac{\partial {}_Q \Sigma}{\partial Z^k} \Big|_{Z(Q)} = \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial Z^k} \Big|_{Z(Q)} - \mathcal{D}_k(Z(Q), Z(Q)) {}_Q \Sigma(Z(Q)), \quad (29)$$

which is the desired partial result.

Let us now define the function  ${}^{(I)}\delta$  on  $\mathcal{M}$  by  ${}^{(I)}\delta(Q) = {}^{(I)}_Q \Phi(Z(Q))$  for all points  $Q$  and let  ${}^{(I)}\bar{\delta}$  be the realization of  ${}^{(I)}\delta$  in  $C$ . Equations (19), (21) and (29) show that knowing  ${}^{(S)}\delta$  and  $\Delta$  is equivalent to knowing  ${}^{(I)}\delta$  and  $\Delta$ .

Having thus obtained the Itô form of (16) at any given point  $Q$ , one can perform a random time change from  $dt^Q$  to  $dt$  and obtain form (14) of the stochastic process  $\mathcal{P}$  at  $Q$ . Indeed, given an arbitrary point  $Q \in \mathcal{M}$ , the random time change  $dt = A^{-1}(Z)dt^Q$  leads to

$${}^{(I)}\Phi(Z(Q)) = {}_Q^{(I)}\Phi(Z(Q))A(Z(Q)), \quad (30)$$

$$\Sigma(Z(Q)) = {}_Q\Sigma(Z(Q))\sqrt{A(Z(Q))}. \quad (31)$$

and

$${}^{(S)}\Phi^k(Z(Q)) = {}^{(I)}\Phi^k(Z(Q)) - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^6 \frac{\partial \Sigma_l^k}{\partial Z^m|_{Z(Q)}} \Sigma_l^m(Z(Q)). \quad (32)$$

Since  $Q$  is arbitrary, (30), (31) and (32) show that knowing  ${}^{(S)}\Phi$  and  $\Sigma$  is equivalent to knowing  ${}^{(I)}\delta$  and  $\Delta$ , which has already been proven to be equivalent to knowing  ${}^{(S)}d$  and  $\mathfrak{D}$ . We have thus proved that the relativistic stochastic processes considered in Section 2.1 can be defined by giving oneself the functions  ${}^{(S)}d$  and  $\mathfrak{D}$  i.e. the two sets  $\{{}^{(S)}\Phi^Q(Z^Q(Q)), Q \in \mathcal{M}\}$  and  $\{\Sigma^Q(Z^Q(Q)), Q \in \mathcal{M}\}$ . Note finally that, because of (3), these two sets are themselves fully determined by the sets  $\{{}^{(S)}\phi^Q(Z^Q(Q)), Q \in \mathcal{M}\}$  and  $\{\sigma^Q(Z^Q(Q)), Q \in \mathcal{M}\}$ .

### 3 The class of relativistic diffusions considered in this article

#### 3.1 The space-time

We will only consider diffusions in Minkowski space-time  $\mathcal{S}$ . This space-time is homeomorphic to  $\mathbb{R}^4$  and can be covered by single chart atlases [22]; it is endowed with the flat Minkowski metric  $\eta$ . A Lorentz chart  $C$  with coordinates  $(t, \mathbf{x})$  is a global chart of  $\mathcal{S}$  where the coordinate basis components of  $\eta$  read  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . A Lorentz frame is the collection of all Lorentz charts which only differ by isometries of the 3-D Euclidean metric  $d\mathbf{x}^2$ . A Lorentz frame  $\mathcal{R}$  is fully characterized by its 4-velocity  $U_{\mathcal{R}}$ , which is a constant vector field defined on the space-time  $\mathcal{S}$ ; by convention,  $U_{\mathcal{R}}$  is also normalized to unity for the Minkowski metric  $\eta$ .

Any Lorentz chart  $C$  with coordinates  $(t, \mathbf{x})$  induces on the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$  a chart  $C_{\mathcal{M}}$  with coordinates  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  where  $\mathbf{p}$  are the three spatial components of  $p$  in the coordinate basis associated to  $C$ . The time-component  $p_0$  of the on-shell 4-momentum  $p$  is then simply

$$\gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2} \quad (33)$$

and the three functions  $v^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  introduced in (1) can be regrouped into the 3-D vector  $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}/\gamma(\mathbf{p})$ . We emphasize that the notation  $\mathbf{A}^2$  will be used to denote the Euclidean square of a 3-D vector  $\mathbf{A}$ ; in particular,  $\mathbf{A}^2 = -\eta_{ij}A^iA^j = -A^iA_i$ .

#### 3.2 The diffusions

The class of Minkowski diffusions considered in this article is best defined by the method presented in Section 2.2; let us therefore start by characterizing the corresponding charts  $C_{\mathcal{M}}^Q$  attached to all points  $Q$  of  $\mathcal{M}$ .

Consider a Lorentz frame  $\mathcal{R}$ , of 4-velocity  $U_{\mathcal{R}}$ , and a Lorentz chart  $C$  of  $\mathcal{R}$ . Let  $\mathcal{U}$  be a smooth (at least  $C^2$ ) application from the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$  to the unit mass-shell bundle, which verifies, for every  $Q \in \mathcal{M}$ ,  $\pi(\mathcal{U}(Q)) = \pi(Q)$ , where  $\pi$  is the projection of the bundle on its base manifold  $\mathcal{S}$ . We introduce  $U(Q)$  defined by  $U(Q) = \tilde{\pi}_Q(\mathcal{U}(Q))$ , where  $\tilde{\pi}_Q$  is the projection on the space cotangent to  $\mathcal{S}$  at point  $\pi(Q)$ . The vector  $U(Q)$  is represented, in the coordinate basis of  $C$  by  $U^\mu(Q) = (U^0(Q), \mathbf{U}(Q))$ , with  $U^0(Q) = \Gamma(Q) = \sqrt{1 + (\mathbf{U}(Q))^2}$ .

Let  $\mathcal{R}^Q$  be the  $Q$ -dependent Lorentz frame whose velocity 4-vector coincides, at point  $\pi(Q)$ , with  $U(Q)$ . The physical 3-velocity of  $\mathcal{R}^Q$  with respect to  $\mathcal{R}$  is represented by  $\mathbf{u}(Q) = \mathbf{U}(Q)/\Gamma(Q)$ . We define the  $Q$ -dependent chart  $C^Q$  as the chart of  $\mathcal{R}^Q$  obtained from  $C$  by a pure Lorentz transformation (i.e. Lorentz boost) of 3-velocity  $\mathbf{u}(Q)$ . The  $Q$ -dependent chart  $C_{\mathcal{M}}^Q$  is defined as the chart naturally induced by  $C^Q$  on  $\mathcal{M}$ . We note for further use that coordinates/coordinate basis components in  $C_{\mathcal{M}}$  can then be obtained from those in  $C_{\mathcal{M}}^Q$  by a pure Lorentz transformation of 3-velocity  $-\mathbf{u}(Q)$ .

The class  $C$  of diffusion processes  $\mathcal{P}$  considered in this article is defined by the condition:

$$\forall \mathcal{P} \in C, \exists D \in \mathbb{R}_+^*, \forall Q \in \mathcal{M}, \sigma^Q(Z^Q(Q)) = \sqrt{2D}\eta. \quad (34)$$

Combining (34) with the above definition of the charts  $C_{\mathcal{M}}^Q$ , this condition can be rephrased by saying that, for each diffusion, there is at each point  $Q$  on the trajectory of the diffusing particle (in  $\mathcal{M}$ ) a  $Q$ -dependent reference frame  $\mathcal{R}^Q$  where the noise term appearing in the equation of motion is isotropic and coincides with a so-called Gaussian white noise. The amplitude of this Gaussian white noise depends on the diffusion, but not on the point  $Q$  on the trajectory.

### 3.3 Summary

We work in flat Minkowski space-time and all charts are Lorentz charts which can be obtained from one another by pure Lorentz boosts. A process  $\mathcal{P}$  of the class considered in this article is characterized by Stratonovich relations of the form:

$$\begin{aligned} dx_{t^Q|_Q}^{Q,i} &= v^{Q,i}(\mathbf{p}_{t^Q}^Q(Q)) dt^Q \\ dp_{i,t^Q|_Q}^Q &= {}^{(S)}\phi_i^Q(t^Q(Q), \mathbf{x}_{t^Q}^Q(Q), \mathbf{p}_{t^Q}^Q(Q)) dt^Q + \sqrt{2D}\eta_{ij}dB_{t^Q}^j, \end{aligned} \quad (35)$$

valid at all points  $Q$  of the mass-shell  $\mathcal{M}$ . The velocity  $\mathbf{v}^Q(\mathbf{p}^Q)$  of the particle is given by  $\mathbf{v}^Q(\mathbf{p}^Q) = \mathbf{p}^Q/\gamma(\mathbf{p}^Q)$  and  ${}^{(S)}\phi^Q$  represents the so-called deterministic force acting on the particle in the chart  $C_{\mathcal{M}}^Q$ . Each chart  $C_{\mathcal{M}}^Q$  is defined by its  $Q$ -dependent 3-velocity  $\mathbf{u}(Q)$  with respect to a fixed,  $Q$ -independent chart  $C_{\mathcal{M}}$ . Equation (35) at all  $Q$ , together with all  $\mathbf{u}(Q)$ 's, completely determine  $\mathcal{P}$ .

## 4 Stochastic differential equations and transport equation for the class of diffusions considered in this article

### 4.1 Stochastic differential equations

These are obtained by implementing on (35) the procedure outlined in Section 2.2. The detailed computations are presented in the Appendix. One finds that the processes are

represented, in a fixed Lorentz chart  $C_M$  of the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$ , by the following stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= v^i(Z_t) dt \\ dp_{i,t} &= {}^{(I)}\phi_i(Z_t)dt + \sigma_{ij}(Z_t)dB_t^j, \end{aligned} \quad (36)$$

where the expressions of  $v^i(Z_t)$ ,  ${}^{(I)}\phi_i(Z_t)$  and  $\sigma_{ij}(Z_t)$  are given by equations (119), (120) and (124) in Appendix A.5.

## 4.2 Transport equation: (3 + 1) treatment

The one particle phase-space associated naturally associated to (36) is  $\mathbf{R}^6 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$ , equipped with the Lebesgue measure  $d^3x d^3p$ . Let  $\Pi$  be the  $t$ -dependent particle distribution generated by (36) in this phase-space. By (36),  $\Pi$  obeys the following forward Kolmogorov equation [26]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} (\psi_i \Pi) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( A_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \right), \quad (37)$$

with:

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{D\Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})} \frac{1}{p \cdot U} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right]; \quad (38)$$

and

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} - {}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (39)$$

where  ${}^{(I)}\phi_i$  is given by (120). We remind the reader that, in all equations above,  $U$  is actually allowed to depend on the point  $Q$  of the mass-shell bundle *i.e.* on  $t$ ,  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{p}$ .

The distribution  $\Pi$  is a function of the coordinates  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  of the chart  $C_M$ ;  $\Pi$  thus defines a  $C_M$ -dependent function on the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$ . It can be shown however that this function does not actually depend on the chart  $C_M$  [21, 7]. Thus, a single function on  $\mathcal{M}$  represents the density of the stochastic process in all Lorentz frames. The Physics literature expresses this remarkable fact by stating that ‘the one-particle distribution is a Lorentz scalar’<sup>1</sup>. From now on, we will use the same symbol  $\Pi$  to designate the one particle distribution, conceived as a function defined on  $\mathcal{M}$ , or any of its realizations in a given Lorentz chart.

## 4.3 Manifestly covariant transport equation

The idea behind the so-called manifestly covariant formulation ([23, 8]) is to extend the usual one-particle phase space into an 8-D domain  $\mathcal{E}$  of bundle  $\mathcal{F}$  cotangent to the space-time  $\mathcal{S}$ . The domain  $\mathcal{E}$  is chosen as containing the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$  and the particle distribution in  $\mathcal{E}$  is represented by a function  $f$  whose restriction to  $\mathcal{M}$  coincides with  $\Pi$ . A manifestly covariant transport equation is a manifestly covariant equation obeyed by the distribution  $f$  whose validity is a sufficient condition for the validity of the original transport equation obeyed by  $\Pi$ .

<sup>1</sup>It turns out that this distribution is also a general relativistic scalar [23].

We introduce an arbitrary application  $\mathcal{V}$ , from the domain  $\mathcal{E}$  to the bundle cotangent to  $S$ , which coincides with the application  $\mathcal{U}$  on the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$ . We define  $V(Q)$ , for all points  $Q$  in  $\mathcal{E}$ , by  $V(Q) = \tilde{\pi}_Q(\mathcal{V}(Q))^2$ .

Given a Lorentz chart  $C_{\mathcal{M}}$ , the unphysical distribution  $f$  is related to the physical distribution  $\Pi$  by:

$$\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{p \in \mathcal{P}} f(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0, \quad (40)$$

where the  $\delta$  distribution enforces a mass-shell restriction. The domain  $\mathcal{P}$  contains the mass-shell and is defined by:

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}^4, p.V > 0\}. \quad (41)$$

This is the largest domain in which all coefficients of the soon to be presented manifestly covariant transport equation, are defined and regular. The condition  $p.V > 0$  defines the 8-D domain  $\mathcal{E}$  of  $\mathcal{F}$ .

Consider now an arbitrary (not necessarily scalar) quantity  $h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$ . We define a new quantity  $\underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  by

$$\underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{p \in \mathcal{P}} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0. \quad (42)$$

The quantity  $\underline{h}$  is the restriction of  $h$  to the mass-shell bundle  $\mathcal{M}$ . In particular,  $\Pi = \underline{f}$ . We also introduce at this stage an arbitrary off-shell 3-force  $\xi$ , related to the on-shell 3-force  $\psi$  by  $\psi = \underline{\xi}$ .

Taking into account expression (33) of the Lorentz factor  $\gamma$ , the standard properties of  $\delta$  lead to:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial x^i} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0 \quad (44)$$

and:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \underline{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \int_{\mathcal{P}} \left[ \frac{\partial}{\partial p_i} h(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p}) - \frac{p^i}{p_0} \frac{\partial h}{\partial p_0} \right] \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0. \quad (45)$$

These relations can be used to rewrite the various terms appearing in equation (37); one thus obtains, for the terms containing only first-order derivatives:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{p_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) \right] \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0; \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\psi_i \Pi) = - \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{p_0} \left[ \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\Xi_\mu f) \right] \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0, \quad (47)$$

where  $\Xi$  is an off-shell 4-force acting on the particle, related to the off-shell 3-force  $\xi$  by

$$\Xi_0 = p^i \xi_i \quad (48)$$

$$\Xi_i = -p_0 \xi_i. \quad (49)$$

---

<sup>2</sup>We recall that  $\pi(Q)$  is the projection of a point  $Q \in \mathcal{E}$  on the space-time  $\mathcal{S}$  and that  $\tilde{\pi}_Q$  is the projection on the space cotangent to  $\mathcal{S}$  at point  $\pi(Q)$ .



Note that  $\Xi.p = 0$ , even for off-shell momenta.

The noise term in (37) can be rewritten as:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( A_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \right) = - \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{p_0} \left[ \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot V} \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right) \right] \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0, \quad (50)$$

where the tensor  $K$  is defined by :

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = V^\mu V^\beta \Delta^{\rho\nu} - V^\mu V^\nu \Delta^{\rho\beta} + V^\rho V^\nu \Delta^{\mu\beta} - V^\rho V^\beta \Delta^{\mu\nu}, \quad (51)$$

and  $\Delta$  is the projector on the orthogonal to  $V$ :

$$\Delta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \quad (52)$$

Using equations (46), (47) and (50), (37) can be rewritten as

$$\int_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p_0} \mathcal{L}(f) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0 = 0, \quad (53)$$

where

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\Xi_\mu f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot V} \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right). \quad (54)$$

The simplest possible manifestly covariant transport equation is thus:

$$\mathcal{L}(f) = 0. \quad (55)$$

Note that the operator  $\mathcal{L}$  is manifestly Lorentz invariant. This echoes the fact that the distribution  $f$  is a function defined over  $\mathcal{E}$  i.e. a Lorentz scalar.

## 5 The relativistic Ornstein-Uhlenbeck process (ROUP)

The ROUP ([5, 3, 4]) describes the diffusion of a relativistic point particle in an isotropic fluid<sup>3</sup>. The fluid is supposed to be in a state of global thermal equilibrium. Such a state is represented by a constant 4-vector field  $B$  defined on the space-time  $\mathcal{S}$ . This vector field is future oriented and its constant norm  $\beta = (B \cdot B)^{1/2}$  is the inverse temperature of the equilibrium [23]. The 4-vector field  $W = B/\beta$  is by definition normalized to unity and represents the 4-velocity of the proper frame of the fluid. We denote this frame by  $\mathcal{R}_W$  and choose a chart  $C_W$  in  $\mathcal{R}_W$ ; the associated phase-space coordinates will be denoted by  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ .

As all processes considered in this article, the ROUP is fully determined, at given value of diffusion coefficient  $D$ , by fixing for all  $Q$  (i) the Lorentz frame  $\mathcal{R}^Q$  in which the noise term is isotropic (ii) the value of the deterministic force  $^{(S)}\phi^Q$  at point  $Q$ . The ROUP was built [5] by choosing  $\mathcal{R}^Q = \mathcal{R}_W$ , i.e.  $U(Q) = W$ , for all  $Q$ . This choice is technically the simplest possible one and is physically natural because the fluid in which the particule diffuses is isotropic.

The deterministic force  $^{(S)}\phi^Q$  then coincides for all  $Q$  with  $^{(S)}\phi_W$ , the deterministic Stratonovich 3-force acting on the particle in  $\mathcal{R}_W$ ; this Stratonovich 3-force also

<sup>3</sup>A relativistic fluid is said to be isotropic if, in its local proper frame, there is no preferred spatial direction.

coincides for all  $Q$  with its correspondent Itô forces,  ${}^{(I)}\phi^Q$  and  ${}^{(I)}\phi_W$ , since the stochastic differential equation defining the process in  $C^Q = C_W$  involves a constant noise coefficient  $D$ . The deterministic force  ${}^{(S)}\phi_W$  of the ROUP reads [5]:

$$\left({}^{(S)}\phi_W\right)_i(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = -\alpha \frac{P_i}{\gamma(\mathbf{P})} \quad (56)$$

with

$$\alpha = \beta D. \quad (57)$$

This force is a friction force and  $\alpha$  is simply a friction coefficient. Equation (57) is thus a fluctuation dissipation (FD) relation linking  $\alpha$  and  $D$  to the temperature of the fluid in which the particle diffuses. A second, complementary meaning of (57) will be discussed below.

The stochastic differential equations defining the ROUP thus read, in  $C_W$ :

$$\begin{aligned} dX_T^i &= \eta^{ij} \frac{P_{j,T}}{\gamma(\mathbf{P}_T)} dT \\ dP_{i,T} &= -\alpha \frac{P_{i,T}}{\gamma(\mathbf{P}_T)} dT + \sqrt{2D} \eta_{ij} dB_t^j. \end{aligned} \quad (58)$$

The associated forward Kolmogorov equation is:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \left( \frac{\mathbf{X}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left( -\alpha \frac{\mathbf{P}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) = D \Delta_{\mathbf{P}} \Pi. \quad (59)$$

Let  $C$  be the Lorentz chart obtained from  $C_W$  by a Lorentz boost of velocity  $-\mathbf{w}$  and let  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  be the associated coordinates; let also  $\mathcal{R}$  be the Lorentz frame of  $C$ . The 3-velocity of  $\mathcal{R}_W$  with respect to  $\mathcal{R}$  is  $+\mathbf{w}$ . Since  $W$  is constant, one has, for the ROUP:

$$\frac{\partial w^i}{\partial p_j} = 0, \quad (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2. \quad (60)$$

Hence, the stochastic differential equation of the ROUP in  $C$  is given by (36), with:

$$\begin{aligned} {}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left({}^{(S)}\phi_W\right)_i - \frac{w_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1 - \Gamma)}{\mathbf{w}^2} \left({}^{(S)}\phi_W\right)_j w^j + \Gamma \left({}^{(S)}\phi_W\right)_j p^j \right] \\ &+ D \frac{\Gamma w_i}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot W)^2} (1 + 2(p \cdot W)^2) \end{aligned} \quad (61)$$

and

$$\sigma_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\sqrt{2D} \sqrt{\frac{1}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot W)}} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1 - \Gamma)}{\mathbf{w}^2} w_i w_j + \Gamma w_i p_j - (p \cdot W) \eta_{ij} \right]. \quad (62)$$

In the right-hand side of equation (61),  ${}^{(S)}\phi_W$  is evaluated at  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$  corresponding to  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . The corresponding forward Kolmogorov equation [3, 4] is (37) with:

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{D \Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})} \frac{1}{p \cdot W} \left[ \left( \frac{p \cdot W}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot W}{\Gamma} \right) (w_i p_j + w_j p_i) + w_i w_j \right], \quad (63)$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} = D \frac{\Gamma w_i}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot W)^2} (1 + 2(p \cdot W)^2) \quad (64)$$

and

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_i - \frac{w_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1 - \Gamma)}{\mathbf{w}^2} \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_j w^j + \Gamma \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_j p^j \right]. \quad (65)$$

The off-shell transport equation is given by (55); it is best to choose  $V = W$ ; a convenient form for the off-shell deterministic 4-force  $\Xi_\mu$  of the ROUP reads [4]:

$$\Xi_\mu = -\lambda_\mu^\nu p_\nu p \cdot p + \lambda^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (66)$$

with

$$\lambda_\nu^\mu = \frac{\alpha}{(p \cdot W)^2} \Delta_\nu^\mu, \quad (67)$$

where  $\Delta$  denotes the projector on the orthogonal to  $V$  (see (52)).

The off-shell Kolmogorov equation (55) then admits the off-shell Jüttner distribution  $f_J$ , defined by

$$f_J(p) = \frac{1}{4\pi} \frac{\beta}{K_2(\beta)} \exp(-B^\mu p_\mu) \quad (68)$$

as invariant distribution in  $p$ -space<sup>4</sup>. This result means, in physical terms, that the ROUP thermalizes the diffusing particle with the surrounding fluid. The FD relation (57) thus acquires a second meaning, in which  $1/\beta$  represents the asymptotic temperature of the diffusing particle itself. We refer to [5, 6, 2] for more details on the asymptotic behaviour of the ROUP.

## 6 The Franchi-Le Jan process and the Dunkel-Hänggi process

### 6.1 The Franchi-Le Jan process

This process [16, 17, 2] does not describe the motion of a relativistic particle diffusing through its interactions with a relativistic fluid. The process nevertheless seems to have a possible physical interpretation and we refer to [10, 9] for a lengthy discussion of this and related issues.

Franchi and Le Jan have chosen as Lorentz frame  $\mathcal{R}^Q$  the proper frame of the diffusing particle at point  $Q$ . Given a Lorentz chart  $C$ , an arbitrary point  $Q$  is represented by its coordinates  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ ; the four numbers  $(\gamma(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  are the components of the corresponding on-shell 4-vector  $p$  in the coordinate basis associated to  $C$ . Franchi and Le Jan thus set the 4-velocity  $U(Q)$  of the Lorentz frame  $\mathcal{R}^Q$  equal to  $p$ . They also choose  ${}^{(S)}\phi^Q(Q) = 0$  for all  $Q$ .

The corresponding stochastic equations of motion in  $C$  are given by (36) with:

$${}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{3Dp_i}{\gamma(\mathbf{p})}, \quad (69)$$

$$\sigma_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2D}{\gamma(\mathbf{p})}} \left[ \frac{1 - \gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^2} p_i p_j + \eta_{ij} \right]. \quad (70)$$

<sup>4</sup>This distribution is normalized to unity with respect to the usual mass-shell measure  $\delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p}))d^3p$  [23].

The associated Kolmogorov equation is (37) with

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} [p_i p_j - \eta_{ij}], \quad (71)$$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} = \frac{3Dp_i}{\gamma(\mathbf{p})} \quad (72)$$

and

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0. \quad (73)$$

Equation (37) can be put into a different, more geometrically intuitive form. Let  $m$  be the Riemannian metric induced by the Minkowski metric  $\eta$  on the mass-shell. The metric  $m$  is defined as follows. On the mass-shell, the first component  $p^0$  of  $p$  is identical to the Lorentz factor  $\gamma(\mathbf{p})$  and the square  $dp^2 = \eta_{\mu\nu} dp^\mu dp^\nu$  can therefore be written as a quadratic form in the spatial components  $dp^i$ ; one thus finds that, on the mass-shell,

$$\eta_{\mu\nu} dp^\mu dp^\nu = -m_{ij} dp^i dp^j \quad (74)$$

with

$$m_{ij} = -\left(\eta_{ij} + \frac{p_i p_j}{\gamma^2(\mathbf{p})}\right). \quad (75)$$

The  $m_{ij}$  are the components of  $m$  in the coordinate basis of  $C$ . The components  $m^{ij}$  of the inverse of  $m$  in  $C$  are given by:

$$m^{ij} = p^i p^j - \eta^{ij}. \quad (76)$$

The Laplacian operator [11] associated to  $m$  reads, in coordinates:

$$\Delta_m = \frac{1}{\sqrt{\det m_{ij}}} \frac{\partial}{\partial p^i} \left( \sqrt{\det m_{ij}} m^{ij} \frac{\partial}{\partial p^j} \right), \quad (77)$$

where  $\det m_{ij} = \gamma^{-2}(\mathbf{p})$ . A direct calculation shows that:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( A_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \right) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} \Delta_m \Pi, \quad (78)$$

The transport equation (37) can thus be rewritten into:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} \Delta_m \Pi. \quad (79)$$

The off-shell transport equation is given by (55) along with (54), with  $\Xi_\mu = 0$ . The noise term simplifies greatly because one can choose  $V = p$  for this process, and the corresponding manifestly covariant transport equation reads:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D (\eta_{\rho\nu} - p_\rho p_\nu) \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right) = 0. \quad (80)$$

The process does not admit a Jüttner invariant measure in  $p$ -space, as there is no fluid with which the particle could thermalize.

## 6.2 The Dunkel-Hänggi process

The Dunkel-Hänggi process [12, 13] is an attempt to extend the Franchi-Le Jan process to describe the diffusion of a relativistic point particle in interaction with a surrounding fluid in a state of global thermal equilibrium. As for the ROUP, the equilibrium state of the fluid is represented by a time-like 4-vector field  $B$  whose norm  $\beta$  is the inverse temperature. As before,  $W$  stands for  $B/\beta$  and represents the 4-velocity of the fluid.

As for the Franchi-Le Jan process, the Lorentz frame  $\mathcal{R}^Q$  is chosen to be the rest frame of the particle at point  $Q$ ; this means that  $U(Q) = p$ . Like the ROUP, the Dunkel-Hänggi process is built with a frictional force which ensures that the Jüttner distribution is an invariant measure of the process in momentum space.

Let  $\mathcal{R}_W$  be the global rest frame of the fluid and  $C_W$  a Lorentz chart belonging to  $\mathcal{R}_W$ , with coordinates  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ . In this chart,  $W^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . In  $C_W$ , the Dunkel-Hänggi process is characterized by the set of Itô stochastic differential equations (see (36)):

$$\begin{aligned} dX_T^i &= \eta^{ij} \frac{P_{j,T}}{\gamma(\mathbf{P}_T)} dT \\ dP_{i,T} &= \left( {}^{(I)}\phi_W \right)_i(Z_T) dT + (\sigma_W)_{ij}(Z_T) dB_T^j, \end{aligned} \quad (81)$$

where the noise coefficient is the same than for the Franchi-Le Jan process (see (70)):

$$(\sigma_W)_{ij}(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = \sqrt{\frac{2D}{\gamma(\mathbf{P})}} \left[ \frac{1 - \gamma(\mathbf{P})}{\mathbf{P}^2} P_i P_j + \eta_{ij} \right]; \quad (82)$$

the Itô drift term reads:

$$\left( {}^{(I)}\phi_W \right)_i(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = -\nu P_i + \frac{3DP_i}{\gamma(\mathbf{P})}, \quad (83)$$

where  $\nu$  is a positive friction coefficient. The transport equation corresponding to (81) is:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{P^i}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) = \frac{\partial}{\partial P_i} (\nu P_i \Pi) + \frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \left( \frac{D}{\gamma(\mathbf{P})} (P_i P_j - \eta_{ij}) \right) \frac{\partial \Pi}{\partial P_j} \right]. \quad (84)$$

Consider now an arbitrary Lorentz frame  $\mathcal{R}$  and a chart  $C$  in  $\mathcal{R}$ , with coordinates  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . The components of  $W$  in  $C$  are:  $W^\mu = (\Gamma(\mathbf{w}), \Gamma(\mathbf{w}) \mathbf{w})$ , where  $\mathbf{w}$  is the 3-velocity of  $\mathcal{R}_W$  with respect to  $\mathcal{R}$ . The stochastic differential equations characterizing the Dunkel-Hänggi process in  $C$  are obtained by performing a Lorentz boost of 3-velocity  $-\mathbf{w}$  on the set of Stratonovich stochastic equations associated to (81). The complete procedure is detailed in the Appendix. We thus get:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= \eta^{ij} \frac{p_{j,t}}{\gamma(\mathbf{p}_t)} dt \\ dp_{i,t} &= {}^{(I)}\phi_i(Z_t) dt + \sigma_{ij}(Z_t) dB_t^j, \end{aligned} \quad (85)$$

where

$$\sigma_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})}} (\sigma_W)_{kj} \left[ \delta_i^k - \frac{w_i}{p \cdot W} \left( \frac{(1 - \Gamma(\mathbf{w})) \gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{w}^2} w^k + \Gamma(\mathbf{w}) p^k \right) \right] \quad (86)$$

and

$${}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left( {}^{(S)}\phi_i - \frac{1}{2} \eta^{jl} \sigma_{kl} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial p_k} \right), \quad (87)$$

with

$$^{(S)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(^{(S)}\phi_W\right)_i - \frac{w_i}{p \cdot W} \left( \frac{(1 - \Gamma(\mathbf{w})) \gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{w}^2} w^k \left(^{(S)}\phi_W\right)_k + \Gamma(\mathbf{w}) p^k \left(^{(S)}\phi_W\right)_k \right), \quad (88)$$

$$\left(^{(S)}\phi_W\right)_i = \left(^{(I)}\phi_W\right)_i + \frac{1}{2} \eta^{il} (\sigma_W)_{kl} \frac{\partial (\sigma_W)_{ij}}{\partial p_k}, \quad (89)$$

where  $\left(^{(I)}\phi_W\right)_i$  is given by (83) and  $(\sigma_W)_{ij}$  by (82).

The transport equation corresponding to (85) is given by (37), with

$$A_{ij} = -\frac{1}{2} \sigma_{il} \sigma_{kj}^T \eta^{kl} \quad (90)$$

and

$$\psi_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} - ^{(I)}\phi_i. \quad (91)$$

The off-shell transport equation is given by (55) along with (54). The noise term can be simplified into the noise term of equation (80) by choosing  $V = p$ . A convenient form of the off-shell deterministic 4-force  $\Xi_\mu$  of the Dunkel-Hänggi process is

$$\Xi_\mu = -\tilde{\lambda}_\mu^\nu p_\nu p \cdot p + \tilde{\lambda}^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (92)$$

with

$$\tilde{\lambda}_\nu^\mu = \frac{\nu}{(p \cdot W)} \tilde{\Delta}_\nu^\mu, \quad (93)$$

where  $\tilde{\Delta}$  is the projector on the orthogonal to  $W$ :

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - W_\mu W_\nu. \quad (94)$$

The off-shell Kolmogorov equation of the Dunkel-Hänggi process then admits the off-shell Jüttner distribution  $f_J$ , given by (68), as invariant distribution in  $p$ -space if the coefficients  $\nu$  and  $D$  characterizing the process and the inverse temperature  $\beta$  of the fluid satisfy

$$\nu = \beta D; \quad (95)$$

this constitutes a fluctuation-dissipation relation for the Dunkel-Hänggi process ([13]).

## 7 Conclusion

### 7.1 Summary

We have introduced a new, wide class of relativistic stochastic processes. Processes in this class are generalizations of the standard Ornstein-Uhlenbeck process and are characterized by a certain simple property of the stochastic force acting on the diffusing particle. All relativistic stochastic processes considered so far in the literature [16, 12, 13, 17, 9, 2] belong to this class. We have obtained, for each process in the class, the stochastic equations describing the diffusion in an arbitrary Lorentz frame and the associated forward Kolmogorov equation. The corresponding manifestly covariant transport equation has been obtained as well. In particular, a manifestly covariant treatment of both the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi processes is here given for the first time.

## 7.2 Discussion

The material presented in this article shows that all relativistic stochastic processes considered so far in the literature are essentially various implementations of a single construction. The idea behind this construction has been presented here in its full generality, but explicit calculations have been performed in flat space-time only. A necessary extension of this work is therefore to perform all calculations on curved space-time as well. In another direction, one should use the manifestly covariant transport equations presented in Section 4.3 to extend the H-theorem [4, 27] already existing for the ROUP to all other processes in the class considered in this article, including the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi diffusions. Let us finally remark that the construction of relativistic stochastic processes proposed in this article makes it apparent that the class of processes considered here can be extended into even more general ones to describe, for example, diffusions in non isotropic media. Such extensions will be addressed in forthcoming publications.

## A Appendix

The aim of this Appendix is to present the implementation on (35) of the general procedure outlined above in Section 2.2 and to deduce from (35) the stochastic differential equations describing the process  $\mathcal{P}$  in the fixed,  $Q$ -independent Lorentz chart  $C_M$ .

### A.1 Step I: Lorentz boost

The first step is to Lorentz transform (35) to the chart  $C_M$ , keeping  $t^Q$  as parameter. One has immediately

$$\begin{aligned} dx_{t^Q|_Q}^\mu &= \Lambda^\mu_\nu[-\mathbf{u}]_{|_Q} dx_{t^Q|_Q}^{Q\ \nu} \\ dp_{\alpha, t^Q|_Q} &= \Lambda_\alpha^\beta[-\mathbf{u}]_{|_Q} dp_{\beta, t^Q|_Q}^Q, \end{aligned} \quad (96)$$

where the components of the tensor  $\Lambda[-\mathbf{u}]$  corresponding to a Lorentz boost of 3-velocity  $-\mathbf{u}$  are given by

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0[-\mathbf{u}] &= \Gamma \\ \Lambda^i_0[-\mathbf{u}] &= \Gamma u^i \\ \Lambda^0_i[-\mathbf{u}] &= -\Gamma u_i \\ \Lambda^i_j[-\mathbf{u}] &= \delta^i_j + (1 - \Gamma) \frac{u^i u_j}{\mathbf{u}^2} \end{aligned} \quad (97)$$

with  $\Gamma = (1 - \mathbf{u}^2)^{-1/2}$ . One also has, by definition,  $\Lambda_\alpha^\beta = \eta_{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \Lambda^\mu_\nu$ .

The first line of (96) transcribes into:

$$dt_{t^Q|_Q} = \Gamma_{|_Q} \left( dt^Q - u_{i|_Q} dx_{t^Q|_Q}^{Q\ i} \right) \quad (98)$$

$$dx_{t^Q|_Q}^j = (\Gamma u^j)_{|_Q} dt^Q + \left( \delta^j_i + (1 - \Gamma) \frac{u^i u_j}{\mathbf{u}^2} \right)_{|_Q} dx_{t^Q|_Q}^{Q\ j} \quad (99)$$

Equation (96) furnishes  $dp_{t^Q|_Q}$  in terms of all  $dp_{\beta, t^Q|_Q}^Q$ , including  $dp_{0, t^Q|_Q}^Q$ , while (35) only involves  $d\mathbf{p}_{t^Q|_Q}^Q$ . One therefore has to express  $dp_{0, t^Q|_Q}^Q$  in terms of  $d\mathbf{p}_{t^Q|_Q}^Q$ . This can

be done by noting that  $p_0^Q$  is the zeroth component of an on-shell momentum in the coordinate basis of a Lorentz chart; thus,  $p_0 = \gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$ . Since we are working with a Stratonovich process, one can simply write

$$dp_{0,t^Q} = \frac{\mathbf{p}_{t^Q}}{\gamma(\mathbf{p}_{t^Q})} \cdot d\mathbf{p}_{t^Q}, \quad (100)$$

where the dot stands for the standard Euclidean scalar product. One thus obtains from (96), (97) and (100):

$$dp_{i,t^Q|_Q} = \left( \delta_i^j + (1 - \Gamma) \frac{u_i u^j}{\mathbf{u}^2} - \Gamma u_i \eta^{kj} \frac{p_k^Q}{\gamma(\mathbf{p}^Q)} \right) dp_{j,t^Q|_Q}. \quad (101)$$

## A.2 Step II: Partial Simplification

We now use (35) to replace in (98) and (101) the differentials  $d\mathbf{x}_{t^Q|_Q}^Q$  and  $d\mathbf{p}_{t^Q|_Q}^Q$  by their expressions in terms of  $dt^Q$ ,  $d\mathbf{B}_{t^Q}$  and  $(t^Q(Q), \mathbf{x}_{t^Q}^Q(Q), \mathbf{p}_{t^Q}^Q(Q))$ . One obtains:

$$dt_{t^Q|_Q} = \left[ \Gamma \left( 1 - \frac{u_i p^{Qi}}{\gamma(\mathbf{p}^Q)} \right) \right]_{|_Q} dt^Q \quad (102)$$

$$dx_{t^Q|_Q}^i = \left[ \Gamma u^i + \left( \delta_j^i + (1 - \Gamma) \frac{u^i u_j}{\mathbf{u}^2} \right) \frac{p^{Qj}}{\gamma(\mathbf{p}^Q)} \right]_{|_Q} dt^Q \quad (103)$$

and

$$dp_{i,t^Q|_Q} = \left( \delta_i^j + (1 - \Gamma) \frac{u_i u^j}{\mathbf{u}^2} - \Gamma u_i \eta^{kj} \frac{p_k^Q}{\gamma(\mathbf{p}^Q)} \right)_{|_Q} \left( {}^{(S)}\phi_{j|_Q}^Q dt^Q + \sqrt{2D} \eta_{jk} dB_{t^Q}^k \right). \quad (104)$$

## A.3 Step III: Inverse Lorentz boost

We now replace  $t^Q(Q)$ ,  $\mathbf{x}^Q(Q)$  and  $\mathbf{p}^Q(Q)$  in (102) and (104) by their expressions in terms of  $t(Q)$ ,  $\mathbf{x}(Q)$  and  $\mathbf{p}(Q)$ . These are given by the inverse Lorentz transform  $\Lambda^{-1}$ , which obeys  $(\Lambda^{-1})_\mu^\nu = \eta_\mu^\beta \eta^\nu_\alpha \Lambda^\alpha_\beta$ . One thus obtains:

$$\begin{aligned} dt_{t^Q|_Q} &= A^{-1}(Q) dt^Q \\ dx_{t^Q|_Q}^i &= Q v^i(Q) dt^Q \\ dp_{i,t^Q|_Q} &= {}^{(S)}_Q \phi_i(Q) dt^Q + Q \sigma_{ij}(Q) dB_{t^Q}^j \end{aligned} \quad (105)$$

where

$$A^{-1}(Q) = \left( \frac{\gamma(\mathbf{p})}{p \cdot U} \right)_{|_Q}, \quad (106)$$

$$Q v^i(Q) = \eta^{ij} \left( \frac{p_j}{p \cdot U} \right)_{|_Q}, \quad (107)$$

$${}^{(S)}_Q \phi_i(Q) = \left\{ {}^{(S)}\phi_i^Q - \frac{u_i}{p \cdot U} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p}_{t^Q})(1 - \Gamma)}{\mathbf{u}^2} {}^{(S)}\phi_j^Q u^j + \Gamma {}^{(S)}\phi_j^Q p_{t^Q}^j \right] \right\}_{|_Q}, \quad (108)$$

$$Q \sigma_{ij}(Q) = -\sqrt{2D} \left\{ \frac{1}{p \cdot U} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p}_{t^Q})(1 - \Gamma)}{\mathbf{u}^2} u_i u_j + \Gamma u_i p_{j,t^Q} - (p \cdot U) \eta_{ij} \right] \right\}_{|_Q}, \quad (109)$$

and  $U$  is the 4-vector associated to  $\mathbf{u}$ . Thus,  $p \cdot U = \Gamma(\gamma(\mathbf{p}) + p_i u^i) = \Gamma(\gamma(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u})$ .



#### A.4 Step IV: Change from a Stratonovich to an Itô form

Equation (105) can be put in Itô form with the help of the gradient  $\mathcal{D}$  introduced in Section 2.2. Let us compute this function for the class of diffusions considered here.

Let  $Q_1$ ,  $Q_2$  and  $Q_3$  be three points in  $\mathcal{M}$ . As in Section 2.2, the coordinates of point  $Q_i$  in  $C$  are denoted by  $Z_i$ . Using definition (24) in conjunction with (104) and (105), one can write (with obvious notations):

$$\rho(Z_1, Z_2, Z_3) = \sqrt{\frac{p_3 \cdot U_1}{p_3 \cdot U_2}}. \quad (110)$$

One therefore has:

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z_2^k} \Big|_{(Z_1, Z_2, Z_3)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_3 \cdot U_1}{p_3 \cdot U_2}} \frac{1}{p_3 \cdot U_2} p_3 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial Z_2^k}, \quad (111)$$

which leads to (see (26)):

$$\mathcal{D}_k(Z_1, Z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{p \cdot U_1} p \cdot \frac{\partial U_2}{\partial Z_2^k} \Big|_{Z_2=Z_1}. \quad (112)$$

One thus obtains

$$\mathcal{D}_k(Z, Z) = -\frac{1}{p \cdot U} p \cdot \frac{\partial U}{\partial Z^k}, \quad (113)$$

where the conventional, somewhat less precise notation has been used for the derivative.

This result helps put (105) into an Itô form and one obtains:

$$dp_{i,t^Q}|_Q = {}^{(I)}_Q \phi_i(Q) dt^Q + {}_Q \sigma_{ij}(Q) dB_{t^Q}^j \quad (114)$$

with:

$${}^{(I)}_Q \phi_i(Q) = {}^{(S)}_Q \phi_i(Q) + \lambda_i(Q) + \zeta_i(Q), \quad (115)$$

$$\lambda_i(Q) = D \left\{ \frac{\Gamma}{(p \cdot U)^3} \left[ u_i (1 + 2(p \cdot U)^2) - \Gamma^2 \gamma(\mathbf{p}) u_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} + \Gamma \gamma(\mathbf{p}) (p \cdot U) p_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \right] \right\} \Big|_Q, \quad (116)$$

$$\zeta_i(Q) = -\frac{D}{2} \left\{ \frac{\Gamma^2}{(p \cdot U)^3} p \cdot \frac{\partial U}{\partial p_j} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right] \right\} \Big|_Q. \quad (117)$$

#### A.5 Step V: Random time change

One can perform for each  $Q$  the random time change  $dt = A^{-1}(Q) dt^Q$  and one thus obtains Itô stochastic equations of motion in the chart  $C_{\mathcal{M}}$ . These read:

$$\begin{aligned} dx_t^i &= v^i(Z_t) dt \\ dp_{i,t} &= {}^{(I)} \phi_i(Z_t) dt + \sigma_{ij}(Z_t) dB_t^j, \end{aligned} \quad (118)$$

where  $Z = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ , and

$$v^i(Z) = \eta^{ij} \frac{p_j}{\gamma(\mathbf{p})} \quad (119)$$

$${}^{(I)} \phi_i(Z) = H_i(Z) + I_i(Z) + J_i(Z), \quad (120)$$

$$H_i(Z) = \frac{p \cdot U}{\gamma(\mathbf{p})} {}^{(S)}\phi_i^Q - \frac{u_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1-\Gamma)}{\mathbf{u}^2} {}^{(S)}\phi_j^Q u^j + \Gamma {}^{(S)}\phi_j^Q p^j \right], \quad (121)$$

$$I_i(Z) = D \frac{\Gamma}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)^2} \left[ u_i (1 + 2(p \cdot U)^2) - \Gamma^2 \gamma(\mathbf{p}) u_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} + \Gamma \gamma(\mathbf{p})(p \cdot U) p_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \right], \quad (122)$$

$$J_i(Z) = -\frac{D}{2} \frac{\Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)^2} p \cdot \frac{\partial U}{\partial p_j} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right] \quad (123)$$

and, finally:

$$\sigma_{ij}(Z) = -\sqrt{2D} \sqrt{\frac{1}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)}} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1-\Gamma)}{\mathbf{u}^2} u_i u_j + \Gamma u_i p_j - (p \cdot U) \eta_{ij} \right]. \quad (124)$$

In equation (121),  $Q$  is the point of the mass-shell bundle with coordinates  $Z$  in the chart  $C_M$ . In the above equations,  $U$ ,  $\Gamma$ , as well as  $\mathbf{u}$  and its partial derivatives are taken at point  $Q$ .

## References

- [1] L. J. S. Allen. An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology. Prentice Hall (2003).
- [2] J. Angst and J. Franchi. Central Limit Theorem for a Class of Relativistic Diffusions. Accepted for publication in *J. Math. Phys.*.
- [3] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame. *Eur. Phys. J. B*, 19:37 (2001).
- [4] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. Covariant Kolmogorov equation and entropy current for the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *Eur. Phys. J. B*, 23:487 (2001).
- [5] F. Debbasch, K. Mallick, and J.P. Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Stat. Phys.*, 88:945 (1997).
- [6] F. Debbasch and J.P. Rivet. A diffusion equation from the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Stat. Phys.*, 90:1179 (1998).
- [7] F. Debbasch, J.P. Rivet, and W.A. van Leeuwen. Invariance of the relativistic one-particle distribution function. *Physica A*, 301:181(2001).
- [8] F. Debbasch. A diffusion process in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 45(7):2744-2760 (2004).
- [9] F. Debbasch and C. Chevalier. Relativistic Stochastic Processes: a Review. In O. Descalzi, O.A. Rosso and H.A. Larrondo, editors, Proceedings of ‘Medyfinol 2006, Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, Mar del Plata, Argentina, Dec. 4-8 2006’. American Institute of Physics, A.I.P. Conference Proceedings 913, Melville, NY, pp.42 (2007).
- [10] F. Dowker, J. Henson, and R. Sorkin, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 1829–1840 (2004).

- [11] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, and A.T. Fomenko. Modern geometry - Methods and applications. Springer-Verlag, New-York (1984).
- [12] J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of the Relativistic Brownian Motion. The (1+1)-Dimensional Case. *Phys. Rev. E*, 71:016124 (2005).
- [13] J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of the Relativistic Brownian Motion. The (1+3)-Dimensional Case. *Phys. Rev. E*, 72:036106 (2005).
- [14] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics **46**, SIAM (2005).
- [15] A. Einstein. Investigations on the Theory of Brownian Motion. Reprint of the 1st English edition (1926), Dover, New-York (1956).
- [16] J. Franchi, and Y. Le Jan. Relativistic Diffusions and Schwarzschild Geometry. *arXiv math.PR/0410485* (2004).
- [17] J. Franchi. Relativistic Diffusion in Gödel's Universe. *arXiv math.PR/0612020* (2006).
- [18] C.W. Gardiner. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences. Springer-Verlag, New-York, 3rd edition (2004).
- [19] C.W. Gardiner and P. Zoller. Quantum Noise. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, enlarged (2000).
- [20] N. S. Goel and N. Richter-Dyn. Stochastic Models in Biology. The Blackburn Press (2004).
- [21] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen, and C.G. van Weert. Relativistic Kinetic Theory. North-Holland, Amsterdam (1980).
- [22] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. The large scale structure of space-time. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [23] W. Israel. Covariant fluid mechanics and thermodynamics: An introduction. In A. Anile and Y. Choquet-Bruhat, editors, *Relativistic Fluid Dynamics*, volume 1385 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [24] J. Lamperti. Stochastic processes: a survey of the mathematical theory. Applied Mathematical Sciences 23, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [25] J. D. Murray. *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, Mathematical Biology, Springer, 2002.
- [26] B. Øksendal. Stochastic Differential Equations. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 5th edition (1998).
- [27] M. Rigotti and F. Debbasch. A H-theorem for the Relativistic-Ornstein-Uhlenbeck process in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 46:103303 (2005).
- [28] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004.

- [29] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004.
- [30] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Amsterdam (1992).
- [31] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago (1984).

C. Chevalier and F. Debbasch: A unifying approach to relativistic diffusions and H-theorems. *Accepted for publication in Mod. Phys. Lett. B* ([34]).

Modern Physics Letters B  
 © World Scientific Publishing Company

## A UNIFYING APPROACH TO RELATIVISTIC DIFFUSIONS AND $H$ -THEOREMS

C. CHEVALIER\* and F. DEBBASCH†

*Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA, 3 rue Galilée 94200 Ivry, France.*

Received (Day Month Year)

Revised (Day Month Year)

A new, wide class of relativistic stochastic processes is introduced. All relativistic processes considered so far in the literature (the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process as well as the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi processes) are members of this class. The stochastic equations of motion and the associated forward Kolmogorov equations are obtained for each process in the class. The corresponding manifestly covariant transport equation is also obtained. In particular, the manifestly covariant equations for the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi processes are derived here for the first time. Finally, the manifestly covariant approach is used to prove a new  $H$ -theorem for all processes in the class.

*Keywords:* Relativistic stochastic processes;  $H$  theorem; Transport equation

PACS Nos.: 02.50.Ey Stochastic processes; 03.30.+p Special Relativity; 05.60.Cd Classical transport

### 1. Introduction

It is probably fair to say that Stochastic Process Theory originated with Einstein's 1905 study on Brownian motion<sup>12</sup>. The theory has since developed into a full grown branch of Mathematics<sup>20,21</sup> and its current applications include Physics and Chemistry<sup>25,15</sup>, Biology<sup>1,17</sup> and Economics<sup>23,24</sup>. As far as Physics is concerned, one had to wait until the 70's to see what started as an attempt to describe non quantum Galilean diffusions being extended to include Galilean quantum processes<sup>25,16</sup>; but the wait for a relativistic extension was even longer, since the first paper dealing with a relativistic stochastic process of clear physical interpretation was only published in 1997<sup>5</sup>. Other relativistic stochastic processes have recently been considered by various authors<sup>13,10,11,14,7,2</sup>, sometimes with extremely different and seemingly irreconcilable points of view. The aim of the present letter is to propose a unified approach towards all processes already considered in the literature. It turns out that these processes are particular members of a wide class of generalized relativistic Ornstein-Uhlenbeck processes; this class is characterized by a certain simple property obeyed by the stochastic force entering the definition of the processes. More precisely, for each process

\*chevalier\_claire@yahoo.fr

†fabrice.debbasch@gmail.com

in the class, and for each point on the phase-space trajectory of the diffusing particle, there exists a Lorentz frame in which the stochastic force acting on the particle is a Gaussian white noise.

The gaps in the present literature are filled by providing, for all processes in the class, the stochastic equations of motion in an arbitrary Lorentz frame and the associated transport equations, in both standard  $(3+1)$  and manifestly covariant form. In particular, a manifestly covariant treatment of both the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi processes is proposed here for the first time. Finally, the general manifestly covariant approach is used to prove a new  $H$ -theorem, valid for all processes in the class.

## 2. Definition of the class

We work in the special relativistic framework. The space-time is thus flat, equipped with the Minkowski metric  $\eta$ . We only consider Lorentz frames, where the components of  $\eta$  read  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . There is no simple, direct special relativistic analogue of the usual Galilean Brownian motion. The simplest relativistic diffusion processes are analogues of the Ornstein-Uhlenbeck process<sup>5</sup>; in these processes, the force acting on the particle is made up of two distinct contributions; the first one is deterministic and represents the mean force acting on the diffusing particle; the second contribution is stochastic and is the source of noise for the motion. This Letter deals with a new class  $C$  of relativistic processes. This class is characterized by the fact that, for each process  $P$  in  $C$ , there exists at any point  $Z$  of the phase-space trajectory of the diffusing particle, a  $P$ - and possibly  $Z$ -dependent Lorentz frame  $\mathcal{R}^*(Z)$  in which the noise force acting on the particle is a usual Gaussian white noise. Each process  $P$  in the class  $C$  is thus fully determined by a choice of deterministic force and a choice of Lorentz frame  $\mathcal{R}^*(Z)$  for each  $Z$ .

Let  $\mathcal{R}$  be an arbitrary, fixed Lorentz frame, with coordinates  $(t, \mathbf{x})$  and let  $\mathbf{p}$  be the 3-momentum of a point particle of unit mass in  $\mathcal{R}$ ; a point on the phase-space trajectory of the diffusing particle can be labeled by  $Z = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Let us fix a process  $P$  in the class  $C$  and a point  $Z_0$  in phase-space; the Lorentz frame  $\mathcal{R}^*(Z_0)$  can be represented by its 3-velocity field  $\mathbf{u}(Z_0)$  with respect to  $\mathcal{R}$ . Let  $Z^* = (t^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$  be coordinates attached to  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ . These coordinates naturally depend on  $Z_0$  but are defined over all Minkowski space-time; their values at point  $Z_0$  will be denoted by  $Z_0^* = (t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \mathbf{p}_0^*)$ . The process  $P$  is represented, in  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ , by stochastic equations of the form:

$$\begin{aligned} dx_{t^*}^{*i} &= \eta^{ij} \frac{p_{j,t^*}}{\gamma(\mathbf{p}_{t^*}^*)} dt^* \\ dp_{i,t^*}^{*} &= {}^{(S)}\phi^*(Z_{t^*}^*) dt^* + \sigma_{ij}^*(Z_{t^*}^*) dB_{t^*}^j, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $\gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}$  is the Lorentz factor of the particle,  ${}^{(S)}\phi^*$  is the deterministic 3-force acting on the diffusing particle in  $\mathcal{R}^*(Z_0)$ ; the superscript  $(S)$  indicates that these equations are to be understood in the Stratonovich sense<sup>21</sup>. The fundamental property tracing the fact that  $P$  belongs to the class  $C$  is that the noise entering (1) is, at point  $Z_0^*$ , a Gaussian white noise:

$$\sigma_{ij}^*(Z_0^*) = \sqrt{2D} \eta_{ij}. \quad (2)$$

### 3. Equations in an arbitrary reference frame

The stochastic equations of motions describing the process  $P$  in the original, fixed Lorentz frame  $\mathcal{R}$  can be deduced from (1), (2) by carrying out, for all  $Z_0$ , a Lorentz boost from  $\mathcal{R}^*(Z_0)$  to  $\mathcal{R}$ , followed by a random time change from  $t^*$  to  $t$ . One obtains equations of the form:

$$\begin{aligned} dx_t^j &= v^j(Z_t) dt \\ dp_{i,t} &= {}^{(I)}\phi_i(Z_t)dt + \sigma_{ij}(Z_t)dB_t^j, \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$v^i(Z) = \eta^{ij} \frac{p_j}{\gamma(\mathbf{p})}, \quad (4)$$

$${}^{(I)}\phi_i(Z) = H_i(Z) + I_i(Z) + J_i(Z), \quad (5)$$

$$H_i(Z) = \frac{p \cdot U}{\gamma(\mathbf{p})} {}^{(S)}\phi_i^* - \frac{u_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1-\Gamma)}{\mathbf{u}^2} {}^{(S)}\phi_j^* u^j + \Gamma {}^{(S)}\phi_j^* p^j \right], \quad (6)$$

$$I_i(Z) = D \frac{\Gamma}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)^2} \left[ u_i (1 + 2(p \cdot U)^2) - \Gamma^2 \gamma(\mathbf{p}) u_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} + \Gamma \gamma(\mathbf{p})(p \cdot U) p_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \right], \quad (7)$$

$$J_i(Z) = -\frac{D}{2} \frac{\Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)^2} p \cdot \frac{\partial U}{\partial p_j} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right] \quad (8)$$

and, finally:

$$\sigma_{ij}(Z) = -\sqrt{2D} \sqrt{\frac{1}{\gamma(\mathbf{p})(p \cdot U)}} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1-\Gamma)}{\mathbf{u}^2} u_i u_j + \Gamma u_i p_j - (p \cdot U) \eta_{ij} \right]. \quad (9)$$

In equations (6) to (9), we have introduced the 4-velocity  $U$ , along with the Lorentz factor  $\Gamma = (1 - \mathbf{u}^2)^{-1/2}$ , associated to the 3-velocity  $\mathbf{u}$ . The associated forward Kolmogorov equation reads <sup>21</sup>:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \frac{\partial}{\partial p_i} (\psi_i \Pi) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( A_{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \right), \quad (10)$$

with

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{D\Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})} \frac{1}{p \cdot U} \left[ \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot U}{\Gamma} \right) (u_i p_j + u_j p_i) + u_i u_j \right], \quad (11)$$

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} - {}^{(I)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (12)$$

and where  $\Pi$  is the  $t$ -dependent distribution function in  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ -space, equipped with the Lebesgue measure  $d^3x d^3p$ .

In  $\mathcal{R}$ , each process of the class  $\mathcal{C}$  is fully determined by fixing the deterministic 3-force  $\psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  and the velocity field  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ .



#### 4. Manifestly covariant treatment

Equations (3) or, alternately, equation (10), fully characterize the class  $C$ ; they are however rather cumbersome and, therefore, difficult to use in practice. This problem can be remedied by lifting Kolmogorov equation off the mass-shell and treating  $p_0$  as independent of  $\mathbf{p}$ <sup>19</sup>. One thus introduces a new, unphysical distribution  $f$ , which depends on  $(t, \mathbf{x}, p_0, \mathbf{p})$  and whose restriction to the mass-shell coincides with  $\Pi$ . Kolmogorov equation is itself replaced by a so-called manifestly covariant transport equation *i.e.* by a manifestly covariant equation obeyed by the distribution  $f$  and whose validity is a sufficient condition for the validity of Kolmogorov equation. Making use of the standard techniques of relativistic statistical physics, one finds that the simplest manifestly covariant transport equation associated to (10) reads:

$$\mathcal{L}(f) = 0, \quad (13)$$

with

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\Xi_\mu f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \frac{p_\mu p_\beta}{p \cdot V} \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right), \quad (14)$$

where  $V$  is an off-shell 4-velocity whose restriction on the mass-shell is  $U$ ,

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = V^\mu V^\beta \Delta^{\rho\nu} - V^\mu V^\nu \Delta^{\rho\beta} + V^\rho V^\nu \Delta^{\mu\beta} - V^\rho V^\beta \Delta^{\mu\nu}, \quad (15)$$

and  $\Delta$  is the projector on the orthogonal to  $V$ :

$$\Delta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \quad (16)$$

Let  $\xi$  be any off-shell 3-force whose restriction on the mass-shell is the 3-force  $\psi$ . In equation (14),  $\Xi$  is an off-shell 4-force acting on the particle, related to  $\xi$  by:

$$\begin{aligned} \Xi_0 &= p^i \xi_i \\ \Xi_i &= -p_0 \xi_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Note that  $\Xi \cdot p = 0$ , even for off-shell momenta. The operator  $\mathcal{L}$  is clearly Lorentz invariant. It can be proven by a very general argumentation that both distributions  $f$  and  $\Pi$  also are scalars<sup>18,19,6</sup>.

### 5. Particular processes

#### 5.1. The ROUP

The ROUP<sup>5,3,4</sup> is the first relativistic process to have been introduced in the physical literature. It models the stochastic motion of a point particle diffusing through its interaction with an isotropic fluid. The fluid is taken to be in a state of global thermodynamical equilibrium, with rest-frame  $\mathcal{R}_W$  and 4-velocity  $W$ . The coordinates associated to  $\mathcal{R}_W$  are  $(T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ . The isotropy of the fluid leads to the choice  $\mathcal{R}^*(Z) = \mathcal{R}_W$  for all  $Z$ . The deterministic force acting on the particle is a frictional force; the expression of the corresponding 3-force in  $\mathcal{R}_W$  is<sup>5</sup>:

$$\left( {}^{(S)}\phi_W \right)_i (T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = -\alpha \frac{P_i}{\gamma(\mathbf{P})}, \quad (18)$$

where  $\alpha$  is a friction coefficient. The Kolmogorov equation describing the transport in  $\mathcal{R}_W$  reads:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot \left( \frac{\mathbf{X}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \cdot \left( -\alpha \frac{\mathbf{P}}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) = D \Delta_{\mathbf{P}} \Pi. \quad (19)$$

The Kolmogorov equation in an arbitrary Lorentz frame  $\mathcal{R}^{3,4}$  is given by (10) with

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{D \Gamma^2}{\gamma(\mathbf{p})} \frac{1}{p \cdot W} \left[ \left( \frac{p \cdot W}{\Gamma} \right)^2 \eta_{ij} - \left( \frac{p \cdot W}{\Gamma} \right) (w_i p_j + w_j p_i) + w_i w_j \right] \quad (20)$$

and

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_i - \frac{w_i}{\gamma(\mathbf{p})} \left[ \frac{\gamma(\mathbf{p})(1-\Gamma)}{\mathbf{w}^2} \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_j w^j + \Gamma \left( {}^{(S)}\phi_W \right)_j p^j \right]. \quad (21)$$

The manifestly covariant transport equation is (13), along with (14), where  $V = W$ , and <sup>4</sup>

$$\Xi_\mu = -\lambda_\mu^\nu p_\nu p \cdot p + \lambda^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (22)$$

with

$$\lambda_\nu^\mu = \frac{\alpha}{(p \cdot W)^2} \Delta_\nu^\mu, \quad (23)$$

where  $\Delta$  denotes the projector on the orthogonal to  $V$  (see (16)). Equation (13) admits the off-shell Jüttner distribution <sup>19</sup>

$$f_J(p) = \frac{1}{4\pi K_2(\beta)} \exp(-\beta W^\mu p_\mu) \quad (24)$$

as invariant measure in  $p$ -space, provided the inverse temperature  $\beta$ , the friction coefficient  $\alpha$  and the noise coefficient  $D$  are linked by the relation  $\alpha = \beta D$ . This constitutes a special relativistic fluctuation theorem.

### 5.2. The Franchi-Le Jan process

This process <sup>13,14,2</sup> is obtained by choosing, for all  $Z$ , the instantaneous proper frame of the diffusing particle as Lorentz frame  $\mathcal{R}^*(Z)$  and by setting to zero the force acting on the particle. This process does not describe the diffusion of a particle interacting with a usual surrounding fluid. It has been suggested that the Franchi-Le Jan process is a model for diffusions induced by interaction with quantum gravitational degrees of freedom <sup>8,7</sup>.

The Kolmogorov equation describing the Franchi-Le Jan process in an arbitrary Lorentz frame  $\mathcal{R}$  is (10) with

$$A_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} [p_i p_j - \eta_{ij}], \quad (25)$$

and

$$\psi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0. \quad (26)$$

It can be rewritten as:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{p^i}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = \frac{D}{\gamma(\mathbf{p})} \Delta_m \Pi, \quad (27)$$

where  $m$  is the metric induced by the Minkowski metric  $\eta$  on the mass-shell and  $\Delta_m$  is the Laplace-Beltrami operator<sup>9</sup> associated to  $m$ . The components of the inverse metric  $m^{-1}$  are given by  $m^{ij} = p^i p^j - \eta^{ij}$  and the Laplace-Beltrami operator is defined by

$$\Delta_m = \frac{1}{\sqrt{\det m_{ij}}} \frac{\partial}{\partial p^i} \left( \sqrt{\det m_{ij}} m^{ij} \frac{\partial}{\partial p^j} \right), \quad (28)$$

where  $\det m_{ij} = \gamma^{-2}(\mathbf{p})$ . The off-shell transport equation is given by (13) along with (14), where  $\Xi_\mu = 0$ . The noise term simplifies greatly because one can choose  $V = p$  for this process, and the corresponding manifestly covariant transport equation reads:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} \left( D(\eta_{\rho\nu} - p_\rho p_\nu) \frac{\partial f}{\partial p_\nu} \right) = 0. \quad (29)$$

### 5.3. The Dunkel-Hänggi process

This process<sup>10,11</sup> mixes characteristics of both the ROUP and the Franchi-Le Jan process. The Dunkel-Hänggi process is best presented as describing the interaction of a point particle with a fluid. A proper frame  $\mathcal{R}_W$  and a 4-velocity  $W$  for the fluid are introduced and the deterministic force is a frictional force; the expression of the associated 3-force in  $\mathcal{R}_W$  reads:

$$\left( {}^{(l)}\phi_W \right)_i (T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = -\nu P_i + \frac{3DP_i}{\gamma(\mathbf{P})}, \quad (30)$$

where  $\nu$  is a positive friction coefficient. The noise term, on the other hand, is identical to the Franchi-Le Jan process. It is thus isotropic in the proper frame of the diffusing particle, and not in the proper frame  $\mathcal{R}_W$  of the fluid. It therefore seems that the Dunkel-Hänggi process does not describe diffusions in standard isotropic fluids.

The Kolmogorov equation in  $\mathcal{R}_W$  is given by:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{P^i}{\gamma(\mathbf{P})} \Pi \right) = \frac{\partial}{\partial P_i} (\nu P_i \Pi) + \frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \left( \frac{D}{\gamma(\mathbf{P})} (P_i P_j - \eta_{ij}) \right) \frac{\partial \Pi}{\partial P_j} \right]. \quad (31)$$

The Kolmogorov equation in an arbitrary Lorentz frame  $\mathcal{R}$  is (10), with

$$A_{ij} = -\frac{1}{2} \sigma_{il} \sigma_{kj}^T \eta^{kl} \quad (32)$$

and

$$\psi_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_j} - {}^{(l)}\phi_i, \quad (33)$$

where

$$\sigma_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})}} (\sigma_W)_{kj} \left[ \delta_i^k - \frac{w_i}{p \cdot W} \left( \frac{(1 - \Gamma(\mathbf{w})) \gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{w}^2} w^k + \Gamma(\mathbf{w}) p^k \right) \right], \quad (34)$$

$${}^{(l)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{p \cdot W}{\gamma(\mathbf{p})} \left( {}^{(s)}\phi_i - \frac{1}{2} \eta^{jl} \sigma_{kl} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial p_k} \right), \quad (35)$$

$${}^{(S)}\phi_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left({}^{(S)}\phi_W\right)_i - \frac{w_i}{p \cdot W} \left( \frac{(1 - \Gamma(\mathbf{w}))\gamma(\mathbf{p})}{\mathbf{w}^2} w^k \left({}^{(S)}\phi_W\right)_k + \Gamma(\mathbf{w})p^k \left({}^{(S)}\phi_W\right)_k \right), \quad (36)$$

$$\left({}^{(S)}\phi_W\right)_i = \left({}^{(I)}\phi_W\right)_i + \frac{1}{2}\eta^{jl}(\sigma_W)_{kl} \frac{\partial(\sigma_W)_{ij}}{\partial p_k} \quad (37)$$

and

$$(\sigma_W)_{ij}(T, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = \sqrt{\frac{2D}{\gamma(\mathbf{P})}} \left[ \frac{1 - \gamma(\mathbf{P})}{\mathbf{P}^2} P_i P_j + \eta_{ij} \right]. \quad (38)$$

The manifestly covariant transport equation is (13), with (14), where

$$\Xi_\mu = -\tilde{\lambda}_\mu^\nu p_\nu p \cdot p + \tilde{\lambda}^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (39)$$

$$\tilde{\lambda}_\nu^\mu = \frac{\nu}{(p \cdot W)} \tilde{\Delta}_\nu^\mu, \quad (40)$$

and  $\tilde{\Delta}$  is the projector on the orthogonal to  $W$ :

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - W_\mu W_\nu. \quad (41)$$

The noise term can be simplified into the noise term of equation (29).

## 6. $H$ -theorem

The structure of the manifestly covariant equation makes it possible to prove an  $H$ -theorem common to all processes in the class  $C$ . Let  $f$  and  $g$  be two solutions of equation (13). The 4-current  $S_{[f|g]}$  of the conditional entropy of  $f$  with respect to  $g$  is defined by:

$$S_{[f|g]}^\mu(x) = - \int p^\mu f(x, p) \ln \left( \frac{f(x, p)}{g(x, p)} \right) D^4 p, \quad (42)$$

with  $D^4 p = \theta(p_0) \delta(p^2 - 1) d^4 p$ , where  $\theta$  is the Heaviside function and  $\delta$  is the Dirac distribution. The first step in the proof of the  $H$ -theorem is to evaluate the 4-divergence of this current and to use the manifestly covariant transport equation to convert all space-time derivatives into momentum derivatives. An integration by parts then leads to:

$$\begin{aligned} \partial_\mu S_{[f|g]}^\mu &= \int \left\{ \partial_{p_\nu} (J_{\mu\nu} f) - \partial_{p_\nu} (J_{\mu\nu} g) \frac{f}{g} \right\} \partial_{p_\mu} \ln \left( \frac{f}{g} \right) D^4 p \\ &+ \int \left\{ \mathcal{K}_\mu(g) \frac{f}{g} - \mathcal{K}_\mu(f) \left[ 1 + \ln \left( \frac{f}{g} \right) \right] \right\} \partial_{p_\mu} (D^4 p), \end{aligned} \quad (43)$$

with

$$J_{\mu\nu} = -DK^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu \frac{p_\alpha p_\beta}{p \cdot V}, \quad (44)$$

$$\mathcal{K}_\mu(f) = I_\mu f - \frac{\partial}{\partial p_\nu} (J_{\mu\nu} f), \quad (45)$$

where

$$I_\mu = -DK^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left( \frac{p_\alpha p_\beta}{p \cdot V} \right) + \Xi_\mu. \quad (46)$$

A direct calculation shows that  $\partial_{p_\mu} D^4 p = 2p^\mu \theta(p_0) \delta'(p^2 - m^2 c^2) d^4 p$ . The second integral in (43) thus involves contractions of the form  $p^\mu \mathcal{K}_\mu(u)$ , where the function  $u$  is either  $f$  or  $g$ . replacing  $\mathcal{K}$  by its definition (45), one obtains:

$$\begin{aligned} p^\mu \mathcal{K}_\mu(u) &= p^\mu \left\{ I_\mu u - \frac{\partial}{\partial p_\nu} (J_{\mu\nu} u) \right\} \\ &= DK^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu p^\mu \frac{p_\alpha p_\beta}{p \cdot V} \frac{\partial u}{\partial p_\nu} + p^\mu \Xi_\mu u. \end{aligned} \quad (47)$$

The tensor  $K^{\alpha\mu\beta\nu}$  is antisymmetric upon exchange of the indices  $\mu$  and  $\alpha$ , entailing that  $K^{\alpha\mu\beta\nu} p_\alpha p_\mu p_\beta = 0$ ; moreover, the deterministic 4-force  $F$  is orthogonal to the momentum  $p$ , i.e.  $p^\mu \Xi_\mu = 0$  (see (17)). Equation (47) therefore simply reduces to:

$$p^\mu \mathcal{K}_\mu(u) = 0. \quad (48)$$

Equation (43) thus simplifies into

$$\partial_\mu S_{[f/g]}^\mu(x) = \int J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g] D^4 p, \quad (49)$$

where  $J$  is defined by equation (44) and the functional  $\mathcal{D}$  is given by:

$$\mathcal{D}^\mu[f/g] = \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\ln(f/g)). \quad (50)$$

The value of the scalar  $J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g]$  at point  $z = (x, p)$  is best computed in the Lorentz frame of 4-velocity  $V(z)$ . By definition, the components of  $V(z)$  in this frame are  $(1, 0, 0, 0)$  and one finds by a direct calculation that:

$$J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g] = -\frac{D}{p_0} \eta^{ij} q_i q_j \quad (51)$$

with  $q_i = p_i \mathcal{D}_0[f/g] - p_0^2 \mathcal{D}_i[f/g]$ . This proves that  $J_{\mu\nu} \mathcal{D}^\mu[f/g] \mathcal{D}^\nu[f/g]$  is non negative at all points  $z$  of the extended phase space. The integral (49) is thus non negative, which proves the  $H$ -theorem.

## 7. Conclusion

We have introduced a new, wide class of relativistic stochastic processes. Processes in this class are generalizations of the standard Ornstein-Uhlenbeck process and are characterized by a certain simple property of the stochastic force acting on the diffusing particle. All relativistic stochastic processes considered so far in the literature<sup>13,10,11,14,7,2</sup> belong to this class. We have obtained, for each process in the class, the stochastic equations describing the diffusion in an arbitrary Lorentz frame and the associated forward Kolmogorov equation. The corresponding manifestly covariant transport equation has been obtained as well. In particular, a manifestly covariant treatment of both the Franchi-Le Jan and the Dunkel-Hänggi processes is here given for the first time. We have used the manifestly covariant formulation to prove a new  $H$ -theorem, valid for all the processes in the class. Let us conclude by mentioning some directions in which the work presented in this Letter should be extended. The calculations presented here have been performed in flat space-time only; a

necessary extension is therefore to perform all calculations in curved space-time as well. The construction of relativistic stochastic processes proposed in this Letter makes it also apparent that the class of processes considered here can be extended into even more general ones to describe, for example, diffusions in non isotropic media. Such extensions will be addressed in forthcoming publications.

### Bibliography

1. L. J. S. Allen, *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology* (Prentice Hall, 2003).
2. J. Angst and J. Franchi, Accepted for publication in *J. Math. Phys.*
3. C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet, *Eur. Phys. J. B*, 19:37 (2001).
4. C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet, *Eur. Phys. J. B*, 23:487 (2001).
5. F. Debbasch, K. Mallick, and J.P. Rivet, *J. Stat. Phys.*, 88:945 (1997).
6. F. Debbasch, J.P. Rivet, and W.A. van Leeuwen, *Physica A*, 301:181(2001).
7. F. Debbasch and C. Chevalier, In O. Descalzi, O.A. Rosso and H.A. Larrondo, editors, Proceedings of 'Medyfinol 2006, Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, Mar del Plata, Argentina, Dec. 4-8 2006'. American Institute of Physics, A.I.P. Conference Proceedings 913, Melville, NY, pp.42 (2007).
8. F. Dowker, J. Henson, and R. Sorkin, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 1829–1840 (2004).
9. B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, and A.T. Fomenko, *Modern geometry - Methods and applications* (Springer-Verlag, New-York, 1984).
10. J. Dunkel and P. Hänggi, *Phys. Rev. E*, 71:016124 (2005).
11. J. Dunkel and P. Hänggi, *Phys. Rev. E*, 72:036106 (2005).
12. A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Motion* (Reprint of the 1st English edition 1926, Dover, New-York, 1956).
13. J. Franchi, and Y. Le Jan, *arXiv math.PR/0410485* (2004).
14. J. Franchi, *arXiv math.PR/0612020* (2006).
15. C.W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences* (Springer-Verlag, New-York, 3rd edition, 2004).
16. C.W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise* (Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, enlarged, 2000).
17. N. S. Goel and N. Richter-Dyn, *Stochastic Models in Biology* (The Blackburn Press, 2004).
18. S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen, and C.G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1980).
19. W. Israel, *Covariant fluid mechanics and thermodynamics: An introduction*, In *Relativistic Fluid Dynamics*, volume 1385 of *Lecture Notes in Mathematics*, eds A. Anile and Y. Choquet-Bruhat (Springer-Verlag, Berlin, 1987).
20. J. Lamperti, *Stochastic processes: a survey of the mathematical theory* (Applied Mathematical Sciences 23, Springer-Verlag, Berlin, 1977).
21. B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations* (Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 5th edition, 1998).
22. M. Rigotti and F. Debbasch, *J. Math. Phys.*, 46:103303 (2005).
23. S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model* (Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004).
24. S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* (Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004).
25. N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).

C. Chevalier, M. Bustamante and F. Debbasch. Thermal Statistical Ensembles of Black Holes. *Phys. A*, 376:293-307, 2007 ([24]).

# Thermal statistical ensembles of black holes

C. Chevalier<sup>a,\*</sup>, M. Bustamante<sup>b</sup>, F. Debbasch<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*ERGA/LERMA Université Paris VI UMR 8112, 3 rue Galilée, 94200 Ivry, France*

<sup>b</sup>*Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, Associé au CNRS et aux Universités Paris VI et Paris VII,  
24 rue Lhomond 75231 Paris, France*

Received 25 September 2006

Available online 15 November 2006

---

## Abstract

We consider statistical ensembles of Schwarzschild black holes and prove that these ensembles describe black holes of nonvanishing temperatures. The mean space–times associated to these ensembles are explored through exact computations of their energy distributions, total masses and calorific capacities. We discuss our results, with special emphasis on their connections with current and near future observations of astrophysical black holes, string theory and cosmology.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

**Keywords:** Relativistic statistical physics; Black holes

---

## 1. Introduction

It has long been recognized that applying the general principles of statistical physics to the relativistic gravitational field is a topic of great theoretical and practical interest [1–7]. Indeed, a realistic approach to many astrophysical or cosmological problems demands a statistical treatment of gravity, and the interplay between statistical physics and gravitation naturally connects with quantum gravity and string theory through black holes thermodynamics.

The aim of the present article is to present a detailed analysis of statistical ensembles of classical Schwarzschild black holes. These ensembles are simple enough to permit exact computations, but they can also be used to analyse qualitatively finite resolution effects in current and near future observations of astrophysical black holes. Here are our main conclusions. If the coarse graining taking into account the finite resolution of the observations is small enough (but not necessarily infinitesimally small), each of these statistical ensembles of black holes also represents a black hole. We prove, however, that the coarse graining modifies the horizon radius of a Schwarzschild black hole and also influences the energy repartition in space–time. In particular, after coarse graining, a vacuum black hole appears surrounded by matter. This matter represents the net ‘macroscopic’ effect of the ‘microscopic’ gravitational degrees of freedom which are averaged out by coarse graining. We also prove that the *total* energy of the black hole is nevertheless unaffected by coarse graining. Finally, we compute the temperature associated with the statistical ensembles

---

\*Corresponding author.

E-mail address: [chevalier\\_claire@yahoo.fr](mailto:chevalier_claire@yahoo.fr) (C. Chevalier).



and discuss the connections of our results with current and near future observations of astrophysical black holes, cosmology and string theory.

## 2. Determination of the mean metric

### 2.1. Kerr–Schild coordinates

The statistical ensemble considered in Ref. [8] describes a Schwarzschild black hole of mass  $M$  observed with finite precision measurements of the three spatial Kerr–Schild coordinates. Let  $a$  be a real positive constant. The ensemble is defined as a collection of space–times indexed by a 3-D real parameter  $\omega \in \Omega$ , where  $\Omega$  is the three-ball of radius  $a$ :

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3; \omega^2 \leq a^2\}. \quad (1)$$

Each member  $\mathcal{S}(\omega)$  of this collection is defined as a couple  $(\mathbb{R}^4, g(\omega))$  where  $\mathbb{R}^4$  is used as fixed, base space–time manifold and  $g(\omega)$  is an  $\omega$ -dependent metric defined on  $\mathbb{R}^4$  (except perhaps on sets of zero 3-D ‘spatial’ Lebesgue volume, which represent the singularities of  $g(\omega)$ ). The metric  $g(\omega)$  is actually defined by

$$ds_\omega^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 - \frac{2M}{|\mathbf{r} - \omega|} \left[ dt^2 - \frac{2dt}{|\mathbf{r} - \omega|} d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \omega) + \frac{1}{(\mathbf{r} - \omega)^2} (d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \omega))^2 \right]. \quad (2)$$

In (2),  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  and  $\mathbf{u}^2$  are short-hand notations for the usual Euclidean scalar products of elements  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3$  and we also use the notation  $u$  for the Euclidean norm  $|\mathbf{u}| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$  of an element of  $\mathbb{R}^3$ . Finally, the probability measure on  $\Omega$  is defined by its density  $p(\omega)$  with respect to the Lebesgue measure  $d^3\omega$  and we take this density to be uniform, i.e.,  $p(\omega) = 1/V_a$ , where  $V_a = \frac{4}{3}\pi a^3$ .

The mean space–time  $\mathcal{S}$  corresponding to this ensemble is the base manifold  $\mathbb{R}^4$  equipped with the metric  $\bar{g} = \langle g(\omega) \rangle$ , where the brackets denote an average over  $\Omega$  [9,10]. An approximate expression of  $\bar{g}$  has already been presented in Ref. [8] as an expansion valid to order two in  $a/r$ . An exact expression for  $\bar{g}$  can, however, be obtained, for example by using *Mathematica*. It turns out that the mathematics involved in this exact calculation naturally require the cases  $r > a$  and  $r < a$  to be treated separately. While the case  $r > a$  poses no particular conceptual problem, it is far from obvious that a mean field treatment makes any physical sense in the region  $r < a$ . Roughly speaking, examining the mean metric for  $r < a$  probably boils down to studying the mean field theory at scales comparable to or smaller than the precision of the observations; and there is no a priori guarantee that the averaging will deliver physically reasonable results at these scales.<sup>1</sup> The remainder of this article will therefore focus on examining the mean space–time at points characterized by  $r > a$ .

For such points, the direct exact evaluation of the mean metric in Kerr–Schild coordinates delivers:

$$\begin{aligned} \langle ds^2 \rangle = & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{2M}{r} - \frac{6a^2 M}{5r^3}\right) \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}\right)^2 - \left(1 + \frac{2a^2 M}{5r^3}\right) d\mathbf{r}^2 \\ & + \left[-\frac{3M}{2r} - \frac{3Mr}{2a^2} + \frac{3M}{4a^3 r^2} (a^2 - r^2)^2 \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right)\right] \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.2. Schwarzschild coordinates

Let us first replace the three spatial coordinates  $\mathbf{r}$  by standard spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$ . The metric (3) then takes the form:

$$\langle ds^2 \rangle = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{4a^2 M}{5r^3}\right) dr^2 - r^2 \left(1 + \frac{2a^2 M}{5r^3}\right) d\Gamma^2$$

<sup>1</sup>In traditional physics, similar discussions occur abundantly. In shock waves, for instance, the local state of the fluid varies on scales comparable to the mean free path of the particles constituting the fluid. It therefore makes a priori no sense to study shock waves via usual Navier–Stokes hydrodynamics, which is a mean field theory valid at scales much larger than the mean free path. Hydrodynamics is nevertheless known for producing results on shock waves which are basically correct, at least in order of magnitude [11].

$$+ \left[ -\frac{3M}{2r} - \frac{3Mr}{2a^2} + \frac{3M}{4a^3r^2} (a^2 - r^2)^2 \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right) \right] dr dt, \quad (4)$$

where

$$d\Gamma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (5)$$

Define now a new ‘radial’ coordinate  $\rho$  by

$$\rho(r) = r \sqrt{1 + \frac{2a^2M}{5r^3}}. \quad (6)$$

The components of the metric  $\bar{g}$  in the coordinate system  $(t, \rho, \theta, \phi)$  read:

$$\begin{aligned} \langle ds^2 \rangle = & \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \rho^2 d\Gamma^2 - \frac{5r\rho^2(5r^2(2M+r) - 4a^2M)}{(-a^2M + 5r^3)^2} d\rho^2 \\ & + \frac{\rho}{4ra^3(-a^2M + 5r^3)} \left[ -30a^3Mr^2 - 30aMr^4 + 15Mr(a^2 - r^2)^2 \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right) \right] d\rho dt, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $r$  should now be conceived as a function of the coordinate  $\rho$ , implicitly given by relation (6). Definition (6) however allows for two possible definitions of a function  $r(\rho)$  and which one is chosen in (7) has to be made clear at this point.

Let us define the dimensionless coarse graining parameter  $x$  by

$$x = \frac{a}{M}, \quad (8)$$

and the real number  $r_0$  by

$$r_0 = M \left( \frac{x^2}{5} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

Eq. (6) defines a function  $\rho(r)$  on the positive real-axis. On  $(0, r_0)$ , this function decreases from infinity to its minimum  $\rho_0 = \rho(r_0) = \sqrt{3}M(x^2/5)^{1/3}$  and it increases from  $\rho_0$  to infinity on  $(r_0, +\infty)$ .

Relation (6) therefore defines two different ‘inverse’ functions  $r_-(\rho)$  and  $r_+(\rho)$  on  $(\rho_0, +\infty)$ ; the first one,  $r_-$ , takes its values in  $(0, r_0)$  and  $r_+$  takes its values in  $(r_0, +\infty)$ . The situation is further complicated by the fact that the original expression of the mean space–time metric (3) is only valid for  $r > a$ , so that a meaningful discussion of the issue at hand has to start with a comparison of  $r_0$  and  $a$ .

For  $a > M/5$ ,  $r_0 < a$  and the function  $r_+$  is the only choice for the inverse of  $\rho$  to be used in (7). The situation is not as clear-cut for  $a < M/5$  because  $a$  is then inferior to  $r_0$ . Let  $\rho_a = \rho(a) = Mx\sqrt{1 + 2/(5x)}$ . For all values of  $\rho$  in  $(\rho_a, +\infty)$ , the only inverse that comes into question is still  $r_+(\rho)$ . But for  $\rho \in (\rho_0, \rho_a)$ , both  $r_+$  and  $r_-$  seem possible. However, the physical requirement that the retained function  $r(\rho)$  be continuous for all  $\rho \in (\rho_0, +\infty)$  singles out  $r_+(\rho)$  as the only reasonable choice to be used in (7).<sup>2</sup> From now on, the notation  $r$  when  $\rho$  is used as coordinate simply means the function  $r_+(\rho)$ . The explicit expression of this function is

$$r_+(\rho) = \frac{2\rho}{\sqrt{3}} \cos \left( \frac{1}{3} \arctan \left( \sqrt{\frac{25}{27} \frac{\rho^6}{a^4 M^2} - 1} \right) + \frac{5\pi}{3} \right). \quad (10)$$

Let us turn back to the main line of this section and put the metric of the coarse grained space–time in diagonal form by introducing the new time-coordinate  $\tau$ , the differential of which reads, in terms of  $t$  and  $\rho$ :

$$dt = d\tau + \alpha(\rho) d\rho, \quad (11)$$

<sup>2</sup>If one were to retain  $r_-(\rho)$  for  $\rho \in (\rho_0, \rho_a)$ , the function  $r(\rho)$  would jump from  $r_+(a) = (2a/\sqrt{3}) \cos(\frac{1}{3} \arctan(\sqrt{\frac{25}{27}(a^2/M^2) - 1}) + (5\pi/3))$  to  $a$  at  $\rho = \rho_a$ .

with

$$\alpha(\rho) = \frac{15Mr\rho}{8a^3(2M-r)(a^2M-5r^3)} \left[ -2(a^3r + ar^3) + (a^4 - 2a^2r^2 + r^4) \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right) \right]. \quad (12)$$

The metric components in the coordinate system  $(\tau, \rho, \theta, \phi)$  are

$$\langle ds^2 \rangle = F(\rho) d\tau^2 - G(\rho) d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2, \quad (13)$$

with

$$F(\rho) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned} G(\rho) = & \frac{-2a^2M - 5r^3}{64a^6(2M-r)(a^2M-5r^3)^2} \left[ 4(64a^8M(2M-r) + 90a^4M^2r^4 + 45a^2M^2r^6 \right. \\ & + a^6(-275M^2r^2 + 80r^4)) - 180aM^2r(a^2 - r^2)^2(a^2 + r^2) \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right) \\ & \left. + 45M^2(a^2 - r^2)^4 \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

The use of  $(\tau, \rho, \theta, \phi)$  as coordinates makes the static character of the mean space–time apparent. These coordinates will therefore be called the Schwarzschild coordinates of the mean space–time, in complete analogy with the usual definition of the Schwarzschild coordinates for the standard vacuum Schwarzschild space–time.

### 3. The coarse grained space–time describes a black hole

#### 3.1. Singularities of the metric components in Kerr–Schild and Schwarzschild coordinates

Points on the line  $\mathbf{r} = 0$  are the only singularities of the Kerr–Schild metric components given by (3). Expression (3), however, is only valid for  $r > a$  and therefore does not permit any conclusion to be drawn on the behaviour of the mean space–time at  $\mathbf{r} = 0$ .<sup>3</sup>

Let us now turn to the singularities of the mean metric components in Schwarzschild coordinates. The only singularity of  $F$  is at  $r = 0$  and, thus, does not deserve further discussion. The other singularities are those of  $G$  given by Eq. (15). The only ones for which  $r > a$  are the two poles located at  $r_H = 2M$  and  $r_0 = (x^2/5)^{1/3}$ ; these correspond to

$$\rho_H = 2M \sqrt{1 + \frac{x^2}{20}}, \quad (16)$$

represented in Fig. 1, and

$$\rho_0 = \sqrt{3}M \left( \frac{x^2}{5} \right)^{1/3}, \quad (17)$$

respectively.

The notation  $\rho_H$  will be justified in the next section, where we will show that the surface  $\rho = \rho_H$  is actually a bifurcate Killing horizon. Let us simply emphasize here that  $\rho_H$  is not only a singularity of  $G$  but also a zero of  $F$ , whereas  $F(\rho_0) \neq 0$ .

<sup>3</sup>It seems nevertheless reasonable to expect that spatial averaging will smooth the singularity of the unaveraged Schwarzschild space–time at  $\mathbf{r} = 0$ . To check this, one should evaluate the mean metric components, in Kerr–Schild coordinates, for  $r < a$ . This will not be done here.

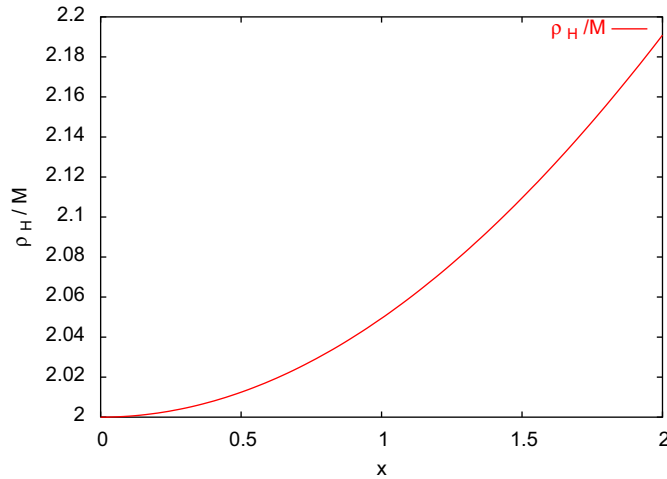


Fig. 1. Evolution of  $\rho_H(x, M)/M$ , the dimensionless radius of the horizon, as a function of the dimensionless coarse graining parameter  $x$ ; the mass  $M$  is fixed.

Since expression (3) was derived under the explicit assumption  $r > a$ , the singularity of  $G$  at  $\rho = \rho_H$  is to be taken into account only if  $r_H = 2M > a$ ; similarly, the singularity at  $\rho = \rho_0$  is only worth discussing when  $r_0 > a$ , i.e.,  $M/5 > a$ .

In any case, both  $\rho_H$  and  $\rho_0$  are only coordinate singularities and not real singularities of the mean space–time, because the Kerr–Schild components of the mean metric  $\bar{g}$  do not exhibit any singularity at  $r = r_H = 2M$  or  $r = r_0$ . The coordinate singularity at  $r = r_0$  traces the fact that the correspondence between the radial Kerr–Schild coordinate  $r$  and the radial Schwarzschild coordinate  $\rho$  is not one-to-one around  $r_0$  (see the discussion in the preceding section). The singularity at  $r = r_H = 2M$  results from the fact that  $2M$  is a pole of the function  $\alpha$  defined in (12); the choice of  $\tau$  as time-coordinate breaks down there because  $\tau$  actually tends to infinity when  $r$  tends towards  $r_H^+$ . Note, quite independently of these remarks, that  $r_H > r_0$  for every  $a < 2\sqrt{10}M$ . Since the function  $\rho(r)$  is increasing for  $r > r_0$ , it follows that  $\rho_H > \rho_0$ , provided  $a < 2\sqrt{10}M$ .

Let us discuss further the coordinate singularities at  $r = r_H = 2M$  and  $r = r_0$  by first concentrating on situations for which  $a \ll M$ . Both singularities are then to be taken into account and the condition  $a \leq 2\sqrt{10}M$  is also de facto realized, so that  $\rho_H > \rho_0$ . The first singularity one encounters when coming from infinity (in  $(\rho, \theta, \phi)$ -space) is therefore the one at  $\rho = \rho_H$ .

Let us now increase the value given to  $a$ . As long as  $a < M/5$ , both coordinate singularities are ‘physical’<sup>4</sup> and one still has  $\rho_H > \rho_0$  (because  $a < 2\sqrt{10}M$ ). For  $M/5 < a < 2M$ ,  $r_0 < a$  but  $r_H > a$ . The singularity at  $\rho = \rho_0$  is then ‘unphysical’ but the one at  $\rho = \rho_H$  is still present and still is the first one encountered by an observer coming from infinity. Finally, for  $a > 2M$ , even the singularity at  $\rho_H$  becomes ‘unphysical’ and the Schwarzschild components of the metric do not exhibit any singularity in the domain  $\rho > \rho_a$  (i.e.,  $r > a$ ).

Thus, for all values of  $a$  inferior to  $2M$ ,  $\rho = \rho_H$  is the first singularity encountered when coming from infinity in  $(\rho, \theta, \phi)$ -space; this singularity is located at  $\rho = 2M$  when  $a = 0$  and shares, for all values of  $a$  inferior to  $2M$ , two striking similarities with the horizon of the unaveraged Schwarzschild space–time. First, the apparent singularity at  $\rho_H$  is due to a breakdown of the time-coordinate change  $t \rightarrow \tau$  and, second,  $\rho_H$  is a zero of  $F$ . It is obviously natural to wonder if this singularity does not trace, for all  $a < 2M$ , the presence of an event-horizon in the mean space–time. To this we now turn our attention.

### 3.2. Horizon of the coarse grained black hole

Let us suppose  $a < 2M$ . From (13), it is obvious that the mean space–time  $\bar{\mathcal{S}}$  admits the Killing vector field  $\xi = \partial_\tau$ . This vector field is normalized to unity at infinity. Since  $\xi^\mu \xi_\mu = g_{\tau\tau} = F(\rho)$ ,  $\xi$  is actually time-like at all

<sup>4</sup>In the sense that both fulfill  $r > a$ , which is the condition under which the expression for the mean metric (3) was derived.

points where  $F > 0$  i.e., in the domain  $\mathcal{D} = \{(\tau, \rho, \theta, \phi), \rho > \rho_H\}$ . The easiest way to proceed is to go on and work in the Schwarzschild coordinates  $(\tau, \rho, \theta, \phi)$ , and to study the behaviour of  $\bar{g}$  for  $\rho = \rho_H^+$  by expanding the components of  $\bar{g}$  given by (13) in a neighbourhood of  $\rho = \rho_H$ . We get

$$\langle ds^2 \rangle = (\rho - \rho_H) F'(\rho_H) d\tau^2 - \frac{1}{(\rho - \rho_H) P'(\rho_H)} d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2, \quad (18)$$

where

$$P(\rho) = \frac{1}{G(\rho)}. \quad (19)$$

Using Eqs. (6) and (16), we have

$$F'(\rho_H) = \frac{1}{2M} \frac{\sqrt{1 + x^2/20}}{1 - x^2/40}, \quad (20)$$

and

$$P'(\rho_H) = \frac{2x^6}{9M} \frac{1 - x^2/40}{\sqrt{1 + x^2/20}} \left[ -x \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^2 \ln \left( \frac{1 + x/2}{1 - x/2} \right) \right]^{-2}. \quad (21)$$

Let us now consider the class<sup>5</sup> of coordinate systems  $(\tau_K, X_K, \theta, \phi)$  which, around  $\rho = \rho_H^+$ , obey the relations:

$$\begin{aligned} X_K^2 - \tau_K^2 &= \frac{\rho}{\rho_H} - 1, \\ \ln \left( \frac{X_K + \tau_K}{X_K - \tau_K} \right) &= \tau \sqrt{F'(\rho_H) P'(\rho_H)}. \end{aligned} \quad (22)$$

By extension of the usual terminology, we will call any of these coordinate systems a Kruskal coordinate system for  $\bar{\mathcal{S}}$ . Around  $\rho = \rho_H^+$ , the Kruskal components of  $\bar{g}$  read

$$\langle ds^2 \rangle = \frac{4\rho_H}{P'(\rho_H)} (d\tau_K^2 - dX_K^2) - \rho^2 (X_K, \tau_K) d\Gamma^2, \quad (23)$$

where

$$\rho(X_K, \tau_K) = \rho_H + \rho_H (X_K^2 - \tau_K^2). \quad (24)$$

In this form, the metric  $\bar{g}$  can be extended through the surface  $\rho = \rho_H$  to values of  $\rho$  inferior to  $\rho_H$ . Eqs. (23) and (24) also make it clear that the surface  $\rho = \rho_H$ , on which the Killing field  $\partial_\tau$  is null, is a bifurcate Killing horizon. The coarse grained space–time thus describes a black hole and its geometry around the horizon  $\rho = \rho_H$  is completely similar to the geometry of the original, unaveraged Schwarzschild solution around  $\rho = 2M$ .

#### 4. Mean energy–momentum tensor

In the previous section we showed that, for all  $a < 2M$ , the mean space–time associated to the ensemble of black holes describes a black hole. It is interesting to further investigate the properties of this coarse grained black hole by determining the energy–momentum tensor in the region lying outside the horizon. This region corresponds to the domain  $\mathcal{D}$  of the mean space–time covered by the Schwarzschild coordinates, and the calculation is best carried out using these coordinates, if only because they make the energy–momentum tensor diagonal [12]. The exact expressions for the Schwarzschild components of the mean energy–momentum tensor have been judged too complicated to warrant reproduction in this article. At this point, we just recall the approximate expressions of these components already given in Ref. [8],

<sup>5</sup>More precisely, Eqs. (22) define a jet of coordinate systems.

which are valid when  $a \ll r$ :

$$\begin{aligned} 8\pi \tilde{\mathcal{T}}_0^0 = \varepsilon &\approx -\frac{6a^2 M^2}{5\rho^6}, & 8\pi \tilde{\mathcal{T}}_1^1 = -p_1 &\approx -\frac{6a^2 M^2}{5\rho^6}, \\ 8\pi \tilde{\mathcal{T}}_2^2 = -p_2 &\approx \frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}, & 8\pi \tilde{\mathcal{T}}_3^3 = -p_3 &\approx \frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}. \end{aligned} \quad (25)$$

The component  $\tilde{\mathcal{T}}_0^0$  represents the energy density  $\varepsilon$  of the apparent matter and, for  $\{i = 1, 2, 3\}$ ,  $-\tilde{\mathcal{T}}_i^i$  represents the pressure  $p_i$  of the apparent matter in the direction  $i$ .

Let us now investigate if the mean energy–momentum tensor satisfies any of the usual energy conditions [13,14]. The weak energy condition is satisfied if, for all time-like vectors  $\chi$ ,  $\tilde{\mathcal{T}}_{\mu\nu}\chi^\mu\chi^\nu \geq 0$ . Similarly, the strong energy condition is fulfilled if  $(\tilde{\mathcal{T}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{T}}g_{\mu\nu})\chi^\mu\chi^\nu \geq 0$  for all time-like vectors  $\chi$ . Finally, the dominant energy condition is realized if the vector of components  $\tilde{\mathcal{T}}_\mu^\nu\chi^\mu$  is future-oriented time-like or null for all future-oriented time-like vectors  $\chi$ . Note that the weak energy condition is automatically verified if the dominant energy condition is Ref. [14].

In the case at hand, the Killing vector field  $\partial_\tau$  is time-like, future-oriented outside the horizon and thus constitutes a possible (and natural) choice for  $\chi$  in this region of space–time. With this choice, the weak, strong and dominant energy conditions lead to

$$\varepsilon F(\rho) \geq 0, \quad (26)$$

$$\frac{F(\rho)}{2} \left( \varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i \right) \geq 0, \quad (27)$$

$$\varepsilon \geq 0. \quad (28)$$

The function  $F(\rho)$  [see Eq. (14)] is positive for all  $r > 2M$ . The sign of the left-hand side of relation (26) ((27), respectively) is therefore that of  $\varepsilon$  ( $\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i$ , respectively). One can immediately see from (25) that both  $\varepsilon$  and  $\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i$  are negative in the limit  $r \gg a$ . Therefore, neither the weak, nor the strong, nor the dominant energy condition is satisfied by  $\tilde{\mathcal{T}}$  when  $r \gg a$ . The simplest way to see whether this is also the case for all  $r > a$  is to plot the values of  $\varepsilon$  and  $\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i$  obtained out of the exact components of  $\tilde{\mathcal{T}}$  against both  $a$  and  $r$ . Figs. 2 and 3 make clear that  $\varepsilon$  and  $\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i$  are also negative for all  $r > a$ , which implies that all three energy conditions are violated by  $\tilde{\mathcal{T}}$  for all  $r > a$ .

Finally, by taking the trace of Einstein's equation, the scalar curvature  $\tilde{\mathcal{R}}$  of the mean space–time outside the horizon can be obtained from the exact components of  $\tilde{\mathcal{T}}$ :

$$\tilde{\mathcal{R}} = -8\pi \tilde{\mathcal{T}}_\mu^\mu. \quad (29)$$

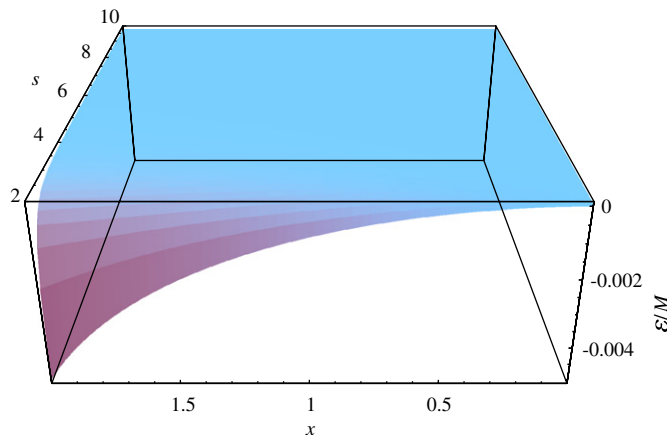


Fig. 2. The dimensionless energy density  $\varepsilon/M$  as a function of  $x = a/M$  and  $s = r/M$ , for  $s > x$ .

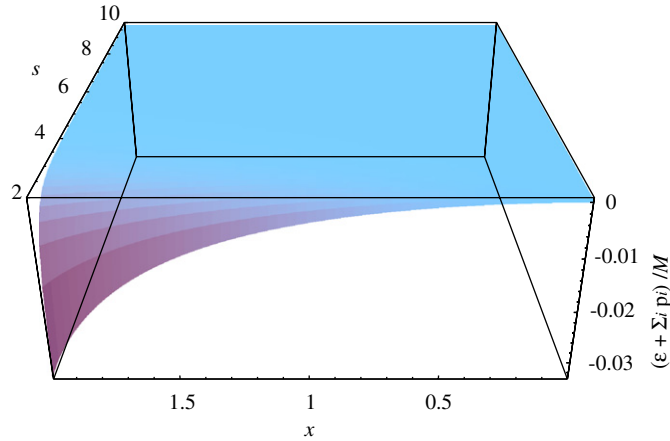


Fig. 3. The dimensionless sum  $(\varepsilon + \sum_{i=1}^3 p_i)/M$  as a function of  $x = a/M$  and  $s = r/M$ , for  $s > x$ .

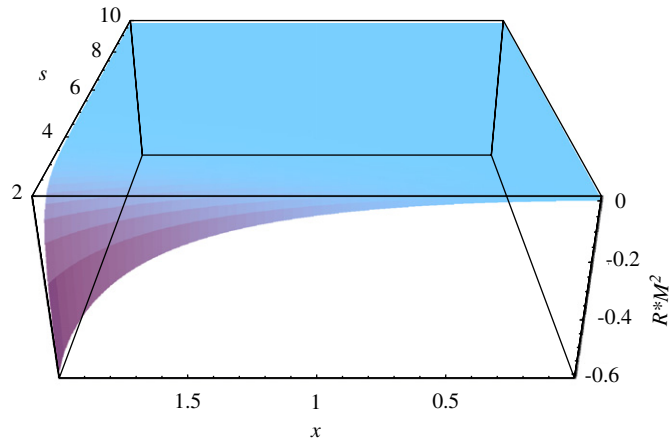


Fig. 4. The adimensionalized scalar curvature  $\tilde{\mathcal{R}} \times M^2$  of the coarse grained space–time as a function of  $x = a/M$  and  $s = r/M$ , for  $s > x$ .

The exact expression of  $\tilde{\mathcal{R}}$  thus derived does not seem of any practical use and will not be presented here. The numerical value of  $\tilde{\mathcal{R}}$  is nevertheless plotted in Fig. 4. By expanding  $\tilde{\mathcal{R}}$  at second order in  $a/r$ , one rediscovers the expression obtained in [8]:

$$\tilde{\mathcal{R}} = -\frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}. \quad (30)$$

In Fig. 4, one sees immediately that the coarse graining endows the space–time with a negative scalar curvature. At fixed value of the dimensionless coarse graining parameter  $x$ , the scalar curvature  $\tilde{\mathcal{R}}$  increases with  $r$  and vanishes when  $r$  reaches infinity. Fig. 4 also makes it evident that, at fixed  $r$ ,  $|\tilde{\mathcal{R}}|$  is a decreasing function of  $x$ .

## 5. Mass of the coarse grained space–time

The far-field regime of the mean gravitational field is best studied by expanding the exact expression (13) in powers of  $a/\rho$  around infinity (in  $\rho$ ). This gives, at the first nonvanishing order in  $a/\rho$  [8]:

$$\langle ds^2 \rangle = F(\rho) d\tau^2 - \frac{1}{F(\rho)} d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2, \quad (31)$$

with

$$F(\rho) = 1 - \frac{2M}{\rho} - \frac{2a^2 M^2}{5\rho^4}. \quad (32)$$

This shows that the mean space–time is asymptotically flat and has, therefore, a finite total mass. This mass can be evaluated by recalling [15] that any asymptotically flat space–time  $\mathcal{S}$  admits a class  $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{S})$  of coordinate systems  $(\tau, \mathbf{R})$  in which the metric takes the asymptotic form

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[ 1 - \frac{2\mu}{R} + \frac{2\mu^2}{R^2} + O\left(\frac{\mu^3}{R^3}\right) \right] d\tau^2 - \left[ 1 + \frac{2\mu}{R} + \frac{3\mu^2}{R^2} \right] d\mathbf{R}^2 \\ & + O\left(\frac{\mu^3}{R^3}\right) d\tau dR^i + (\text{gravitational radiation terms}) dR^i dR^j, \end{aligned} \quad (33)$$

around infinity (in  $\mathbf{R}$  space); the coefficient  $\mu$  is common to all coordinate systems in  $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{S})$  and is the mass of the space–time under consideration.

Let now  $\mathcal{S}$  be the usual, unaveraged Schwarzschild space–time of mass  $M$ ; a particularly simple coordinate system in  $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{S})$  is the so-called isotropic coordinate system [14,15]. Its time  $\tau$  coincides with the time of the Schwarzschild coordinate system, and the spatial coordinates  $\mathbf{R} = (R \sin \theta_R \cos \phi_R, R \sin \theta_R \sin \phi_R, R \cos \theta_R)$  are linked to the three Schwarzschild spatial coordinates  $(\rho, \theta, \phi)$  by  $\theta_R = \theta$ ,  $\phi_R = \phi$  and

$$\rho = R \left( 1 + \frac{M}{2R} \right)^2. \quad (34)$$

By Eqs. (31) and (32), the modifications induced on the metric of space–time by the finite coarse graining involves terms which decrease at infinity like  $1/\rho^4$  or faster; in particular,  $a$  does not contribute to the  $1/\rho$  factor in (32). It is therefore tempting to simply use Eq. (34) to define a new ‘radial’ coordinate  $R$  for the mean space–time and to investigate the asymptotic form of the mean metric in the new coordinate system  $(\tau, R, \theta, \phi)$ . A direct calculation proves that, in this coordinate system, the mean metric takes indeed the standard form (33) with  $\mu = M$ , the mass of the original, unaveraged Schwarzschild black hole. Thus, the total mass of the space–time is unchanged by the averaging procedure. Note that this result is valid for any finite value of the coarse graining parameter  $a$ , even though the derivation just proposed uses only the asymptotic form (31) of the mean metric; in particular, the exact calculation of the mean metric presented in Section 2 did not prove necessary for the computation in the present section.

## 6. Thermodynamical aspects of the mean space–time

### 6.1. Temperature of the coarse grained black hole

The thermal properties of the usual Schwarzschild black hole are perhaps most simply derived by studying the natural topology of the Euclidean Schwarzschild space time [14,16]. We will now do the same for the coarse grained space–time  $\mathcal{S}$ . Let us therefore introduce in  $\mathcal{D}$  the so-called imaginary time  $\psi = i\tau$  and the new radial coordinate:

$$U(\rho) = 2\sqrt{\frac{\rho - \rho_H}{P'(\rho_H)}}, \quad (35)$$

which tends towards  $0^+$  on the horizon. Eq. (35) leads to:

$$dU^2 = \frac{d\rho^2}{(\rho - \rho_H)P'(\rho_H)}, \quad (36)$$



and, near the horizon, the metric  $\bar{g}$  (see Eq. (18)) takes the simple form

$$\langle ds^2 \rangle = - \left[ U^2 d \left( \frac{\psi}{2/\sqrt{F'(\rho_H)P'(\rho_H)}} \right)^2 + dU^2 \right] - \rho^2(U) d\Gamma^2 \quad (37)$$

with  $\rho(U)$  given by

$$\rho(U) = \rho_H + \frac{U^2 P'(\rho_H)}{4}. \quad (38)$$

In these coordinates, the apparent singularity of the  $(\psi, U)$  part of the metric on the horizon at  $U = 0$  is clearly similar to the singularity displayed by the 2-D Euclidean metric in polar coordinates at the origin. It is therefore natural to consider the Euclidean coarse grained space–time as periodic in the imaginary time  $\psi$ , of period

$$\beta = \frac{4\pi}{\sqrt{F'(\rho_H)P'(\rho_H)}}. \quad (39)$$

This periodicity in imaginary time is characteristic of a thermal density matrix [14,16,17] of temperature

$$T = \frac{1}{4\pi} \sqrt{F'(\rho_H)P'(\rho_H)}, \quad (40)$$

Using (20) and (21), one can also express  $T$  as a function of  $x$  and  $M$  (see Fig. 5):

$$T(x, M) = -\frac{1}{12\pi M} g(x), \quad (41)$$

where

$$g(x) = \frac{x^3}{-x \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^2 \ln \left( \frac{1 + x/2}{1 - x/2} \right)}. \quad (42)$$

The above expression can be expanded in  $x$  for  $x \ll 1$ ; for example, one finds at order two

$$T(x, M) = \frac{1}{8\pi M} \left( 1 + \frac{x^2}{20} \right). \quad (43)$$

This confirms that  $T(0, M)$  coincides with the Hawking temperature  $1/8\pi M$  [18] of the Schwarzschild black hole.

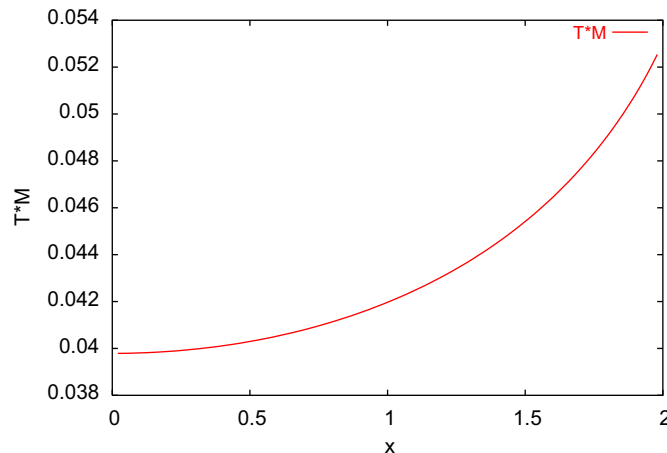


Fig. 5. Evolution of the adimensionalized temperature  $T(x, M) \times M$  with  $x$ , at fixed  $M$ .

The temperature of the usual Schwarzschild black hole can also be defined [14] as a multiple of the surface gravity  $\kappa$  on the event-horizon. A similar definition of  $T(x, M)$  is possible for nonvanishing values of the coarse graining parameter  $a$  and is presented in the Appendix.

## 6.2. Calorific capacity at constant $x$

The calorific capacity at constant  $x$ ,  $\mathcal{C}_x$ , is defined by

$$\mathcal{C}_x = \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_x. \quad (44)$$

Eq. (41) immediately leads to:

$$\mathcal{C}_x = \frac{1}{12\pi T^2} g(x), \quad (45)$$

or, equivalently, in terms of  $x$  and  $M$ :

$$\mathcal{C}_x = 12\pi M^2 g^{-1}(x). \quad (46)$$

Eq. (46) can be expanded at second order in  $x$ :

$$\mathcal{C}_x \approx -8\pi M^2 \left( 1 - \frac{x^2}{20} \right); \quad (47)$$

this reads, in terms of  $\rho_H$  and  $T$ :

$$\mathcal{C}_x \approx -2\pi \rho_H^2 (1 - \frac{4}{3}(4\pi \rho_H T - 1)). \quad (48)$$

The capacity  $\mathcal{C}_x$  can be evaluated in the Schwarzschild limit, which simply corresponds to the case  $x = 0$ ; one finds

$$\mathcal{C}_{x|_{x=0}} = -\frac{1}{8\pi T^2}. \quad (49)$$

As it should, this  $T$ -dependent quantity coincides with what is usually called [14] the calorific capacity of the Schwarzschild black hole.

## 7. Astrophysical implications

Our results can be used to shed new light on the interpretation of current and near future observations of astrophysical black holes.

The black hole candidate closest to us is Sgr A\*; it is located at the Galactic Centre, i.e., approximately at  $D = 8$  kpc from the Sun [19]. Let us first address the infra-red observations of this object. These observations study stellar motions in the immediate vicinity of the Galactic Centre and they have led to an estimation of the central dark mass of roughly  $4 \times 10^6 M_\odot$  [20–22]. The associated length is given by  $L_M = GM/c^2 = 5 \mu\text{as}$  at  $D = 8$  kpc. The stars that have been studied so far are located within a region of radius 0.01 pc (250 mas at 8 kpc) around the Galactic Centre and some approach  $10^{-4}$  pc from the Galactic Centre. In these observations, the relative positions of the stars with respect to the central mass are determined with an angular resolution  $\delta$  of order 2 mas [20]. In the context of the example presented in this contribution, the finite angular resolution  $\delta$  translates, as a first approximation, into a finite resolution  $\Delta = \delta D$  in position measurements around Sgr A\*. The realistic order of magnitude of an adimensionalized coarse graining  $a/M$  corresponding to these observations is therefore  $a/M \sim \delta D/L_M$ . The numerical values given above for  $\delta$  and  $L_M/D$  lead to:

$$\frac{a}{M} \simeq \frac{2 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-6}} \simeq 400. \quad (50)$$

Since  $r \gtrsim 10^{-4}$  pc and  $a \simeq 10^{-5}$  pc, the condition  $r \gg L_M$  is approximately realized in these observations. This means all these observations are concerned with the motions of test objects situated ‘at infinity’ with respect to

Sgr A\*. The mass estimate derived from the study of these motions is therefore a mass estimate ‘at infinity’. The result presented in Section 4.2 strongly supports the fact that this estimate is correct and free of any systematic bias, *whatever the finite value of the angular resolution  $\delta$  may be*. Thus,  $4 \times 10^6 M_\odot$  should be a realistic estimate of the true mass of Sgr A\*, even though the angular resolution of the observations from which this result is deduced is actually quite poor from a theoretical point of view (the corresponding value of the adimensionalized coarse graining parameter  $a/M$  being approximately 400).

Let us now address the high resolution observations of Sgr A\* made with very large baseline interferometry (VLBI). The current resolution of these observations is  $20 \mu\text{as}$ ,<sup>6</sup> i.e., two Schwarzschild radii  $2M$  at 7 mm wavelength [23]. VLBI imaging resolution is, however, expected to be narrowed down to  $20 \mu\text{as}$  at 1.3 mm wavelength during the next decade [24]. In the context of the example presented here, this resolution corresponds roughly to:

$$\frac{a}{M} \sim \frac{\delta D}{L_M} \simeq 4. \quad (51)$$

Thus, a coarse graining parameter  $a$  taking into account the typical finite resolution of the near future observations would be of the same order of magnitude as the Schwarzschild radius  $2M$  of Sgr A\*.

The material presented in Section 3.2 supports the fact that a black hole observed with a finite precision  $a$  smaller or comparable to its horizon radius should still appear as a black hole. In particular, near future VLBI observations, which will have a resolution comparable to the theoretical Schwarzschild radius  $2M$  of Sgr A\*, should be able to detect a shadow [24]. But the apparent size of the shadow should be compared with a theoretical estimate which takes into account the finite resolution of the observations by using a mean or coarse grained gravitational field to compute the motion of stars and photons orbiting the black hole. Typically, one can expect the size of the apparent shadow to be comparable to a few  $\rho_H$ . In the context of the example presented in Section 3.2,  $\rho_H$  depends on both the mass  $M$  and on the coarse graining parameter  $a$  tracing the finite resolution of the observations. Since the projected observational situation corresponds to a value of  $x = a/M$  of order unity, the difference between  $\rho_H$  and the ‘theoretical’ horizon radius  $2M$  of the unaveraged black hole cannot be expected to be small, and will probably be of order unity. So will also be the difference between the observed size of the shadow ( $\sim 5 \times \rho_H$ ) and the ‘theoretical’ estimate  $5 \times 2M$ . Thus, contrarily to what is usually expected [25], the apparent size of the shadow will probably not provide a direct, unbiased estimate for the mass of Sgr A\*.

## 8. Summary and discussion

### 8.1. Summary

Statistical ensembles of (vacuum) Schwarzschild black holes have recently been introduced to model finite precision observations of astrophysical black holes. These ensembles are characterized by the mass  $M$  of the black hole and a single coarse graining parameter  $a$ . We have shown that the main properties of these ensembles can be investigated through exact computations. Our main conclusions are as follows.

For all values of  $a$  inferior to  $2M$ , the mean or coarse grained space–time described by an ensemble is still a black hole, and we have obtained the explicit expression of its horizon radius as a function of  $M$  and  $a$ . The coarse grained space–time is, however, not vacuum; it is endowed with a nonvanishing energy–momentum tensor which represents on scales larger than  $a$  the net effect of the gravitational degrees of freedom which have been averaged out by the coarse graining. We have shown that the total mass of the space–time is not changed by the averaging; in other words, the statistical averaging changes the distribution of energy in space–time, but not the total energy. We have then proved that the statistical ensembles corresponding to black holes (i.e., those for which  $a < 2M$ ) are associated with a finite temperature, and we have derived an explicit expression of this temperature in terms of  $M$  and  $a$ ; we have also computed the calorific capacity of these coarse grained black holes at constant values of the dimensionless parameter  $a/M$ . Finally, our results have been connected to current and near future observations of Sgr A\*. We suggest that the current mass

<sup>6</sup>‘as’ is short for ‘arc second’.

estimate of the object is correct but that the radius of the shadow hopefully detected by near future observations will differ from the commonly admitted theoretical value by a factor of order unity.

## 8.2. Discussion

The material of this article is related to results from string theory [27–29] and cosmology.

The nonperturbative results presented in this article confirm the conclusion [8–10] that averaging a gravitational field generally changes the energy–momentum tensor of the space–time. Indeed, they show that a vacuum Schwarzschild black hole, observed with finite precision, appears as a black hole surrounded by an apparent matter which endows effectively the exterior of the hole with a strictly negative apparent scalar curvature. However, the space–time considered in this article is asymptotically flat. It thus makes sense to speak of its total mass and it turns out that the averaging presented here only redistributes the energy in space–time, without changing the total mass at infinity. The situation for non asymptotically flat space–times such as cosmological space–times is perhaps more interesting. There is no natural notion of total mass for these space–times [14] and the averaging procedure thus changes the only energetic quantity characterizing them, namely their energy–momentum tensor. This opens the possibility that at least part of the apparent dark cosmological energy might be due to the averaging of the small-scale inhomogeneities linked with the existence of the various structures which break the large-scale homogeneity and isotropy. This idea, which has been first suggested in Ref. [9], has been further discussed in Ref. [8] and has now been elaborated upon in Ref. [26], although in a perturbative way only.

Let us now discuss the thermal aspects of the ensembles considered in this article. Only systems described by a statistical ensemble can have a nonvanishing temperature; the fact that the horizon of a general relativistic black hole is a bifurcate Killing horizon entails that a temperature is naturally associated to these objects [18]; this means that general relativistic black holes are ultimately to be understood as statistical ensembles. The last decade has brought a dramatic breakthrough in this direction since the black hole thermodynamics can now be recovered by considering microcanonical ensembles of (fundamental) strings [27–29].

The averaging considered in this article involves ensembles which are *not* ensembles of strings, but ensembles of nonquantum general relativistic space–times. It is nonetheless natural to wonder how such a purely classical averaging procedure modifies the temperature of a given space–time. The material presented in the previous sections brings a partial answer to that very general question by considering a particular statistical ensemble in which all space–times already have a common nonvanishing temperature and by examining if, and how, this temperature is modified by the classical spatial averaging. We have found that the temperature does indeed change upon averaging,<sup>7</sup> and that the temperature of the coarse grained space–time is larger than the temperature of the unaveraged one.

As indicated earlier, a black hole can be viewed as a microcanonical ensemble of strings. The fact that the purely classical spatial averaging procedure carried out in this article changes the thermodynamical property of a black hole suggests that this procedure might be susceptible of a simple interpretation in terms of string theory. This interpretation is naturally not currently available, but developing it should prove very rewarding and might lead to drastically new insights, not only on the mean field theory which serves as a basis for the general relativistic calculations presented in this article, but also on string theory.

Let us conclude by mentioning briefly some possible extensions of our results. On the astrophysical side, one should now systematically consider ensembles of black holes which do take into account the real (current and future) observational conditions and evaluate, from each of these ensembles, a realistic mean or coarse grained black hole. Only the properties of this space–time, and not those of an unaveraged one, can sensibly be used to interpret observational data. Naturally, for a given observational procedure, one should not only construct ensembles of Schwarzschild black holes, but also ensembles of Kerr black holes if one wants to extract from the data information about the angular momentum of the observed object.

On the purely theoretical side, investigating the link between classical averaging and string theory suggested by our results seems particularly tantalizing. The analysis might start by considering not only Schwarzschild, but also Kerr–Newman black holes, and subject them to various ‘spatial’ and ‘nonspatial’ averagings.

<sup>7</sup>Though the total energy of the space–time does not.

Finally, the cosmological implications of the general mean field theory originally presented in Ref. [9], and developed on a particular example of astrophysical interest in the present article, should certainly be the focus of intense activity, not only in a perturbative regime [26], but perhaps even more so in fully nonlinear ones.

### Acknowledgements

We acknowledge fruitful discussions with Y. Ollivier and J.P. Rivet.

### Appendix

The expression of the temperature  $T(x, M)$  obtained in Section 6.1 can be recovered by evaluating the so-called surface gravity of the mean black hole. The spirit and the technical aspects of this calculation are sufficiently different from those of the computation presented in Section 6.1 to warrant a full discussion in this Appendix.

The surface gravity  $\kappa$  of a black hole is defined by [14]:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \lim (\nabla^\mu \xi^\nu)(\nabla_\mu \xi_\nu), \quad (52)$$

where ‘lim’ stands for the limit as one approaches the bifurcate Killing horizon generated by the Killing field  $\xi$ . Strictly speaking, the limit generally depends on which orbit of  $\xi$  is approached on the horizon, i.e., the quantity  $\kappa$  is constant on each orbit of  $\xi$  on the horizon but changes from orbit to orbit. There is a theorem [14], however, which ensures that  $\kappa$  does not depend on the orbit if the vector  $\mathcal{T}_\mu^\nu \xi^\mu$  is time-like future oriented or null on the horizon (here  $\mathcal{T}$  stands for the energy–momentum tensor of the space–time under consideration). In particular,  $\kappa$  is surely constant if the dominant energy condition is verified.

It has been shown in Section 4 that the dominant energy condition is violated by the coarse grained space–time studied in this article and that  $\tilde{\mathcal{T}}_\mu^\nu (\partial_\tau)^\mu$  is time-like past oriented on the horizon for all  $a < 2M$ . There is therefore no a priori guarantee that  $\kappa$  is indeed constant on the bifurcate Killing horizon generated by  $\partial_\tau$ . This is nevertheless so, as will be proven now by a direct computation of  $\kappa$ . The result also de facto confirms that a (single) temperature can indeed be associated to the coarse grained black hole.

Let  $\xi = \partial_\tau$ ; a straightforward calculation, using the components of the mean metric (13), gives

$$(\nabla^\mu \xi^\nu)(\nabla_\mu \xi_\nu) = \{(\tilde{g}^{11} \nabla_1 \xi^0)(\nabla_1 \xi_0) + (\tilde{g}^{00} \nabla_0 \xi^1)(\nabla_0 \xi_1)\}, \quad (53)$$

$$\Rightarrow (\nabla^\mu \xi^\nu)(\nabla_\mu \xi_\nu) = -\frac{F'^2(\rho)}{2G(\rho)F(\rho)}. \quad (54)$$

One then takes the limit  $\rho = \rho_H$  and inserts Eq. (54) into (52), which yields:

$$\kappa^2 = \frac{F'^2(\rho_H)}{4F(\rho_H)G(\rho_H)}, \quad (55)$$

and

$$\kappa = \frac{F'(\rho_H)}{2\sqrt{F(\rho_H)G(\rho_H)}}. \quad (56)$$

Eq. (56) can be rewritten in terms of  $x$  and  $M$ , using (16):

$$\kappa(x, M) = -\frac{x^3}{6M} \left[ -x \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^2 \ln \left( \frac{1+x/2}{1-x/2} \right) \right]^{-1}. \quad (57)$$

The Hawking temperature  $T$  is related to the surface gravity  $\kappa$  by [18]:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (58)$$

which leads immediately to (41).

## References

- [1] T. Futamase, A new description for a realistic inhomogeneous universe in general relativity, *Progr. Theor. Phys.* 86 (1991) 389–399.
- [2] M. Kasai, Construction of inhomogeneous universes which are Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker on average, *Phys. Rev. D* 69 (1992) 2330–2332.
- [3] T. Futamase, General relativistic description of a realistic inhomogeneous universe, *Progr. Theor. Phys.* 89 (1993) 581–597.
- [4] T. Futamase, Averaging of a locally inhomogeneous realistic universe, *Phys. Rev. D* 53 (1996) 681–689.
- [5] R. Zalaletdinov, Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein’s equation in cosmology, *Bull. Astron. Soc. India* 25 (1997) 401–416.
- [6] T. Buchert, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies, *Gen. Rel. Grav.* 32 (2000) 105–126.
- [7] T. Buchert, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies, *Gen. Rel. Grav.* 33 (2001) 1381–1405.
- [8] F. Debbasch, Y. Ollivier, Observing a Schwarzschild black hole with finite precision, *Astron. Astrophys.* 433 (2) (2005) 397–404.
- [9] F. Debbasch, What is a mean gravitational field?, *Eur. Phys. J. B* 37 (2) (2004) 257–270.
- [10] F. Debbasch, Mean field theory and geodesics in general relativity, *Eur. Phys. J. B* 43 (1) (2005) 143–154.
- [11] W. Israel, Covariant fluid mechanics and thermodynamics: an introduction, in: A. Anile, Y. Choquet-Bruhat (Eds.), *Relativistic Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1385, Springer, Berlin, 1987.
- [12] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *The Classical Theory of Fields*, vol. 2, fourth ed., Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [13] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space–Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [14] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [15] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Co., New York, 1973.
- [16] S.W. Hawking, R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [17] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [18] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Chicago Lectures in Physics, The University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [19] R. Schödel, et al., A geometric determination of the distance to the Galactic Center, *ApJ* 597 (2) (2003) L121–L124.
- [20] A.M. Ghez, et al., Full three dimensional orbits for multiple stars on close approaches to the central supermassive black hole, *Astron. Nachr. Suppl.* 324 (1) (2003) 527–533.
- [21] A.M. Ghez, et al., The first measurement of spectral lines in a short-period star bound to the galaxy’s central black hole: a paradox of youth, *ApJ* 586 (2) (2003) L127–L131.
- [22] R. Schödel, et al., Stellar dynamics in the central arcsecond of our galaxy, *ApJ* 596 (2) (2003) 1015–1034.
- [23] G. Bower, et al., Detection of the intrinsic size of Sagittarius A\* through closure amplitude imaging, *Science* 304 (5671) (2004) 704–708.
- [24] S. Doeleman, G. Bower, Approaching the event horizon through VLBI imaging of Sagittarius A\*, *GCNews* 18 (2004) 6–12.
- [25] M. Miyoshi, An approach detecting the horizon of Sgr A\*, in: *Proceedings of the Seventh European VLBI Network Symposium*, Toledo, 2004.
- [26] E.W. Kolb, S. Matarese, A. Riotto, On cosmic acceleration without dark energy, *arXiv:astro-ph/056534v1*, 2005.
- [27] G.T. Horowitz, Quantum states of black holes, in: R.M. Wald (Ed.), *Black Holes and Relativistic Stars*, The University of Chicago Press, Chicago, 1998.
- [28] M. Kaku, *Introduction to Superstrings and M-theory*, second ed., Springer, New York, 1999.
- [29] C.V. Johnson, *D-Branes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

C. Chevalier, F. Debbasch and J.P. Rivet: A stochastic approach to thermodiffusion. *Submitted to Eur. Phys. Lett.* ([35])

# A stochastic approach to thermodiffusion

C. CHEVALIER<sup>1</sup>, F. DEBBASCH<sup>1</sup> and J.P. RIVET<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, UMR 8112, ERGA-LERMA, 3 rue Galilée 94200 Ivry, France.*

<sup>2</sup> *Laboratoire Cassiopée, CNRS UMR 6202, Observatoire de la Côte d’Azur, F-06304 Nice Cedex 04, France.*

PACS 02.50.Ey – Stochastic processes

PACS 05.60.Cd – Classical transport

PACS 05.40.-a – Fluctuation phenomena, random processes, noise, and Brownian motion

**Abstract.** – In presence of thermal inhomogeneities, particle diffusion is known to occur even without concentration gradients. This phenomenon, known as “thermodiffusion” or “Ludwig-Soret effect” is well documented since the nineteenth century, and has numerous current applications which range from Astrophysics to polymer Physics and Chemistry. In this Letter, we propose new microscopic stochastic models of thermodiffusion. These models are variants of the Ornstein-Uhlenbeck process and their large scale behaviour coincides with the prediction of standard continuous media theories.

**Introduction.** – Stochastic process theory is one of the most popular tools used in modelling time-asymmetric phenomena, with applications as diverse as economics [1, 2], traffic management [3, 4], biology [5, 6], physics and chemistry [7] and cosmology [8]. As far as physical and chemical applications are concerned, there is one important class of classical diffusion phenomena for which stochastic models are still lacking. It is well known from classical continuous media theories and classical kinetic theory [9, 10] that temperature inhomogeneities induce particle diffusion. This phenomenon is called thermodiffusion or “Ludwig-Soret effect” [11, 12] and its simplest macroscopic description is obtained by adding to the usual Fick current (proportional to the gradient of the diffusing particle density) a thermal particle current proportional to the temperature gradient of the medium. This effect has a lot of applications for example in astrophysics [13], in polymer physics [14, 15] or in chemistry [16]. For example, thermodiffusion coupled with convection in a suitable narrow column of fluid mixture can lead to spontaneous discrimination of chemical species [17, 18].

The aim of this Letter is to propose stochastic processes which model thermodiffusion and to recover the usual expression of the thermal particle current by studying the hydrodynamical limit of these processes. For simplicity reasons, we only discuss 1D models.

**The stochastic model.** – Let us therefore consider a particle with position  $x(t)$  and momentum  $p(t)$  which diffuses through its interactions with a surrounding medium.

We suppose that the medium is ‘isotropic’ and globally at rest in the chosen reference frame. Let  $\theta(x)$  be its inhomogeneous temperature field. We focus on generalized Ornstein-Uhlenbeck models of the form:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{p}{m} dt \\ dp &= -\alpha^{(S)}(x, p) p dt + \sqrt{2D(x, p)} dB_t, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $B_t$  is a standard Brownian motion and the superscript  $(S)$  indicates that these equations are to be understood in the Stratonovich sense [19]. The isotropy of the medium surrounding the diffusing particle is traced by imposing that the functions  $\alpha^{(S)}$  and  $D$  depend on  $p$  through its square  $p^2$  only and we write  $D(x, p) = \Delta(x, u)$  with  $u = p^2$ . The density  $f$  of the process with respect to the phase-space measure  $dx dp$  obeys the forward Kolmogorov equation:

$$\partial_t f + \partial_x \left( \frac{p}{m} f \right) = Lf, \quad (2)$$

where

$$Lf = \partial_p \left( D(x, p) \partial_p f + \alpha(x, p) p f \right) \quad (3)$$

and  $\alpha(x, p) = \alpha^{(S)}(x, p) + \frac{\partial \Delta}{\partial u} \Big|_{u=p^2}$ . The spatial density  $n(t, x)$  of the diffusing particle is defined by

$$n(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, p) dp. \quad (4)$$

We restrict the choice of  $\alpha^{(S)}(x, p)$  and  $D(x, p)$  by imposing, for all  $x$  and  $p$ , the local fluctuation-dissipation



relation :

$$\frac{\alpha(x, p)}{D(x, p)} = \frac{1}{mk_B\theta(x)}. \quad (5)$$

The local Maxwell distribution :

$$M_{\text{loc}}(x, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_B\theta(x)}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B\theta(x)}\right) \quad (6)$$

then belongs to the kernel of  $L$ , but is a solution of (2) only when  $\partial_x \left(\frac{p}{m} f_{\text{loc}}\right) = 0$  i.e. for uniform temperatures. Note that  $M_{\text{loc}}$  is normalized to unity with respect to  $dp$ ; the spatial density associated to  $M$  is thus constant and equal to unity at all times and positions.

**The Chapman-Enskog expansion.** — We will now prove that processes of the form (1) induce, in the hydrodynamical limit, a thermal particle current which is a linear combination of the density gradient and of the temperature gradient. Loosely speaking, the hydrodynamical limit corresponds to near equilibrium situations where all considered fields vary slowly in space and time. This definition can be made precise in the following way. The near equilibrium character of the hydrodynamical regimes is taken into account by assuming that the distribution  $f$  of the diffusing particle in phase space can be expanded around the Maxwellian local equilibrium distribution of density  $n(t, x)$ , temperature  $\theta(x)$  and vanishing mean velocity :

$$f_0(t, x, p) = n(t, x) M_{\text{loc}}(x, p). \quad (7)$$

We thus introduce an infinitesimal parameter  $\varepsilon$  and a collection of functions  $f_k(t, x, p)$  for  $k > 0$  such that the solution of the Kolmogorov equation (2) reads :

$$f(t, x, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t, x, p). \quad (8)$$

We treat (8) as a Chapman-Enskog expansion and therefore impose that

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(t, x, p) dp = 0, \quad \text{for } k > 0; \quad (9)$$

thus,  $f_k$  does not contribute to the spatial density if  $k > 0$ . The functions  $f_k$  will be obtained by solving the transport equation (2) and condition (9) implies that the all  $f_k$ 's depend on  $n$  and  $\theta$  only.

Let us now suppose that one can find a constant friction coefficient  $\alpha_0$  and a constant temperature  $\theta_0$  such that  $|\alpha(x, p)/\alpha_0| = O(1)$  and  $|\theta(x)/\theta_0| = O(1)$ ; one therefore also has  $|D(x)/D_0| = O(1)$  with  $D_0 = \alpha_0 k_B \theta_0 / m$ . The constants  $\alpha_0$  and  $\theta_0$  are then used to define a characteristic time  $\tau = 1/\alpha_0$ , a characteristic mean free path  $\lambda = \tau \sqrt{k_B \theta_0 / m}$  and a characteristic momentum  $\rho = m\lambda/\tau$ . We focus on regimes in which the density  $n(t, x)$  of the diffusing particle varies on typical space and time scales much larger than  $\lambda$  and  $\tau$ . In addition, we assume that

the temperature field  $\theta(x)$  varies on the same typical space scale as the density  $n$ . We thus write :

$$\lambda \left| \frac{\partial_x \theta}{\theta} \right| = O(\tilde{\varepsilon}), \quad (10)$$

$$\lambda \left| \frac{\partial_x f_k}{f_k} \right| = O(\tilde{\varepsilon}), \quad (11)$$

and

$$\tau \left| \frac{\partial_t f_k}{f_k} \right| = O(\nu), \quad (12)$$

where  $\tilde{\varepsilon}$  and  $\nu$  are two at this stage arbitrary infinitesimal parameters. Relations (5) and (10) imply that the quotient  $\alpha/D$  also varies on space scales which are  $\lambda O(\tilde{\varepsilon})$ ; we admit, to simplify the coming discussion, that this is also true of  $\alpha$  and  $D$  separately.

The transport equation (2) is then best solved by introducing the dimensionless time and space variables  $T = \nu t/\tau$  and  $X = \tilde{\varepsilon} x/\lambda$  as well as the dimensionless momentum  $P = p/\rho$ . We define a dimensionless density  $N(T, X)$  as :

$$N(T, X) = \frac{\lambda}{\tilde{\varepsilon}} n\left(\frac{T\tau}{\nu}, \frac{X\lambda}{\tilde{\varepsilon}}\right), \quad (13)$$

and a dimensionless phase space density  $F(T, X, P)$  as :

$$F(T, X, P) = \frac{\lambda\rho}{\tilde{\varepsilon}} f\left(\frac{T\tau}{\nu}, \frac{X\lambda}{\tilde{\varepsilon}}, \rho P\right), \quad (14)$$

so that the following simple normalization relations hold :

$$\int_{\mathbb{R}} N(T, X) dX = 1, \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^2} N(T, X, P) dX dP = 1 \quad (15)$$

In term of the dimensionless variables, the Kolmogorov equation (2) reads :

$$\nu \partial_T F + \tilde{\varepsilon} \partial_X (P F) = \mathcal{L} F \quad (16)$$

where

$$\mathcal{L} F = \partial_P \left( \mathcal{D}(X, P) \left( \partial_P F + \beta(X) P F \right) \right), \quad (17)$$

with

$$\mathcal{D}(X, P) = \frac{D\left(\frac{X\lambda}{\tilde{\varepsilon}}, \frac{P}{\rho}\right)}{D_0}, \quad (18)$$

and

$$\beta(X) = \frac{\theta_0}{\theta\left(\frac{X\lambda}{\tilde{\varepsilon}}\right)}. \quad (19)$$

The first two moments of (16) read :

$$\begin{cases} \nu \partial_T N + \tilde{\varepsilon} \partial_X J &= 0 \\ \nu \partial_T J + \tilde{\varepsilon} \partial_X S &= \beta(X) J, \end{cases} \quad (20)$$

where  $S = N < P^2 >$  and  $J = N < P >$  ( $J$  is the dimensionless particle current). The angular brackets denote averages over  $P$  against the measure  $F(T, X, P) dP$

at fixed  $T$  and  $X$ . By (8) and (7),  $J = O(\varepsilon)$  and  $S = O(1)$ . Equations (20) therefore imply  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$  and  $\nu = \tilde{\varepsilon}\varepsilon$ , which then transcribes into  $\nu = \varepsilon^2$ . The Kolmogorov equation then reads:

$$\varepsilon^2 \partial_T F + \varepsilon \partial_X (P F) = \mathcal{L} F. \quad (21)$$

Note that these scalings are identical to those obeyed by the hydrodynamic regimes of the Ornstein-Uhlenbeck process in uniform temperature fields.

The local equilibrium distribution reads in terms of the dimensionless variables:

$$F_0(T, X, P) = N(T, X) \sqrt{\frac{\beta(X)}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\beta(X)P^2}{2}\right). \quad (22)$$

It solves (21) at order zero in  $\varepsilon$ . The first order terms of (21) collect into:

$$\mathcal{L} F_1 = \partial_X (P F_0), \quad (23)$$

where  $F_1$  is the dimensionless version of  $f_1$ , the first order term of the Chapman-Enskog expansion (8). Equation (23) can be integrated over  $P$  to deliver:

$$\mathcal{D}(X, P) \left( \partial_P F_1 + \beta(X) P F_1 \right) = -\partial_X \left( \frac{F_0(T, X, P)}{\beta(X)} \right). \quad (24)$$

The function  $H_1(T, X, P)$ , defined by:

$$H_1(T, X, P) = F_1(T, X, P) \exp\left(+\beta(X) \frac{P^2}{2}\right), \quad (25)$$

for all  $T$ ,  $X$  and  $P$ , verifies:

$$\partial_P H_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta(X)} \mathcal{D}(X, P)} \left( A + B P^2 \right), \quad (26)$$

where  $A$  and  $B$  are the following functions of  $T$  and  $X$ :

$$\begin{cases} A(T, X) &= \partial_X N - \frac{N}{2} \frac{\partial_X \beta}{\beta}, \\ B(T, X) &= -\frac{N}{2} \partial_X \beta. \end{cases} \quad (27)$$

An Ansatz for  $\mathcal{D}^{-1}$  is needed to obtain an explicit expression for  $H_1$ . We assume that  $\mathcal{D}^{-1}$  can be expanded in series of even powers of  $P$ , such as:

$$\mathcal{D}^{-1}(X, P) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(X) P^{2k}. \quad (28)$$

Equations (26) and (28) then lead to:

$$H_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{2k+1}}{2k+1} \left( a_k A + a_{k-1} B \right), \quad (29)$$

where the convention  $a_k = 0$  for all  $k < 0$  has been used.

The first order contribution  $J_1$  to the particle current is defined in terms of  $F_1$  by:

$$J_1(T, X) = \int_{\mathbb{R}} P F_1(T, X, P) dP. \quad (30)$$

Using equations (25) and (29), and then taking into account expressions (27) for the functions  $A(T, X)$  and  $B(T, X)$ , one finds:

$$\begin{aligned} J_1(T, X) &= -K(X) \partial_X N + \Lambda(X) N \frac{\partial_X \beta}{\beta} \\ &= -K(X) \partial_X N - \Lambda(X) N \frac{\partial_X \theta}{\theta}, \end{aligned} \quad (31)$$

with

$$K(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{2^k k!} \frac{a_{k-1}(X)}{\beta(X)^{k+1}}, \quad (32)$$

and

$$\Lambda(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \frac{(2k)!}{2^k k!} \left( \frac{a_{k-1}(X)}{\beta(X)^{k+1}} + \frac{a_{k-2}(X)}{\beta(X)^k} \right). \quad (33)$$

The convention  $a_k = 0$  for all  $k < 0$  is used again in these expressions.

**Discussion.** – Equation (31) clearly shows that the particle current in physical space is made up of two distinct contributions. The first one is proportional to the density gradient, as is the usual Fick's current. The second contribution is proportional to the temperature gradient and vanishes with the density  $N$ ; it thus describes the Ludwig-Soret effect [20]. The stochastic models presented in this Letter allow both coefficients  $K$  and  $\Lambda$  to depend on position. Note however that these coefficients only depend on the slow position variable  $X$ ; thus, their variations in  $x$ -space involves only scales comparable or greater than the spatial variation scale of the temperature field. We further remark that the coefficients  $K$  and  $\Lambda$  are actually position independent if the functions  $a_k$  which define the noise coefficient  $\mathcal{D}$  are related to the inverse temperature  $\beta$  by  $a_k(X) = a_k^0 \beta(X)^{k+2}$ , where the  $a_k^0$  are themselves constant coefficients.

**Conclusion.** – We have introduced the first microscopic stochastic models for the Ludwig-Soret effect. These models are essentially Ornstein-Uhlenbeck processes with position dependent noise and friction coefficients. They predict that large scale temperature inhomogeneities induce a non vanishing particle current which is proportional to both the temperature gradient and the particle density. These predictions concur with standard macroscopic models from continuous media theories [20].

This work can and should be extended in various directions. A first task is to consider several practically important applications of the Ludwig-Soret effect [14–18] and to determine, for each of these applications, which model(s) in the class introduced above best fits the experimental situations. On the more theoretical side, the work presented

in this Letter should be extended to the both special and the general relativistic realm, if only to model temperature driven diffusions in stars [13].

## References

- [1] SHREVE S.E., *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model* (Springer Finance, Springer-Verlag, New-York) 2004
- [2] SHREVE S.E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* (Springer Finance, Springer-Verlag, New-York) 2004
- [3] SCHRECKENBERG M., SCHADSCHNEIDER A., NAGEL K. and ITO N., *Phys. Rev. E*, **51**(4) (1995) 2939
- [4] MITRA D. and WANG Q., *Stochastic traffic engineering for demand uncertainty and risk-aware network revenue management* (IEEE/ACM Transactions on Networking), Vol. **13**(2) 2005, p. 221
- [5] GOEL N.S. and RICHTER-DYN N., *Stochastic Models in Biology* (The Blackburn Press) 2004
- [6] ALLEN L.J.S., *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology* (Prentice Hall) 2003
- [7] VAN KAMPEN N.G., *Stochastic processes in Physics and Chemistry, 3rd Ed.* (Elsevier) 2007
- [8] CHEVALIER C. and DEBBASCH F., *J. Math. Phys.*, **48** (2007) 023304
- [9] CHAPMAN S. and COWLING T.G., *The mathematical theory of non-uniform gases, 3rd Ed.* (Cambridge Mathematical Library) 1970
- [10] HAFSKJOLD T., IKESHOJI T. and RATKJE S.K., *Mol. Phys.*, **80** (1993) 1389
- [11] LUDWIG C., *Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss.*, **20** (1856) 359
- [12] SORET CH., *Arch. Sci. Phys. Nat. Genève*, **2** (1879) 48
- [13] KIPPENHAHN R. and WEIGERT A., *Stellar Structure and Evolution, 1st Ed.* (Springer-Verlag, Berlin) 1990
- [14] SCHIMPF M.E. and GIDDINGS J.C., *Macro-molecules*, **20** (1987) 1561
- [15] SCHIMPF M.E. and GIDDINGS J.C., *J. Polym. Sci.*, **17** (1989) 1317
- [16] PERRONACE A., LEPLA C., LEROY B., ROUSSEAU B. and WIEGAND S., *J. Chem. Phys.*, **116** (2002) 3718
- [17] CLUSIUS K. and DICKEL G., *Naturwisse*, **6** (1938) 546
- [18] JOLY F., VASSEUR P. and LABROSSE G., *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **27** (2000) 755
- [19] ØKSENDAL B., *Stochastic Differential Equations, 5th Ed.* (Universitext, Springer-Verlag, Berlin) 1998
- [20] LANDAU L.D. and LIFSCHITZ E.M., *fluid mechanics 2nd Ed.* (Pergamon press) 1987

## Annexe 2: Actes de congrès

F. Debbasch et moi-même avons écrit huit actes de congrès, parmi lesquels quatre sont acceptés ou publiés et quatre autres sont actuellement soumis. Parmi ces actes de congrès, j'ai choisi de ne retenir que ceux dont le contenu ne se retrouve pas entièrement dans les articles et les lettres déjà inclus dans ce mémoire:

- F. Debbasch and C. Chevalier: Relativistic Stochastic Processes. In O. Descalzi, O.A. Rosso and H.A. Larrondo, editors, Proceedings of 'Medyfinol 2006, Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, Mar del Plata, Argentina, Dec. 4-8 2006'. American Institute of Physics, A.I.P. Conference Proceedings 913, Melville, NY, 2007 ([45]). Cet acte est un bilan des travaux sur les processus stochastiques relativistes existant dans la littérature.
- C. Chevalier and F. Debbasch. Brownian motion and entropy growth on irregular surfaces. Submitted in 'Proceedings of Analysis and simulation of multiscale nonlinear systems, Oregon State University, Corvallis, Oregon, 2007'. Cet article concerne le travail que nous avons effectué sur l'étude de mouvements browniens sur des surfaces irrégulières. Il contient des discussions sur des entropies conditionnelles qui ne figurent pas dans les articles que nous avons déjà écrits sur ce travail.
- C. Chevalier and F. Debbasch: Is matter an emergent property of space-time? Submitted for publication to the Proceedings

of the International Conference on Complex Systems, Boston, 2007 ([26]). Il s'agit pour l'instant de la seule publication dans laquelle sont présentés les résultats que nous avons obtenus concernant la famille de trous noirs de Reisner-Nordström extrêmes. Cet acte correspond à la section 7.2 du manuscrit.

F. Debbasch and C. Chevalier: Relativistic Stochastic Processes. In O. Descalzi, O.A. Rosso and H.A. Larrondo, editors, Proceedings of ‘Medyfinol 2006, Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics, Mar del Plata, Argentina, Dec. 4-8 2006’. American Institute of Physics, A.I.P. Conference Proceedings 913, Melville, NY, 2007 ([45]).

# Relativistic Stochastic Processes

F. Debbasch and C. Chevalier

*Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA,  
3 rue Galilée, 94200 Ivry, France*

**Abstract.** We review all recent contributions to the literature on stochastic processes. In particular, the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process is presented in detail, as is the intrinsic Brownian motion studied by Franchi and Le Jan. The Relativistic Brownian Motion of Dunkel and Hänggi is also reviewed, together with a model introduced by Oron and Horwitz. We finally suggest some possible future developements of the current research.

**Keywords:** Brownian Motion, Diffusion, Relativistic Statistical Physics, Lorentzian Geometry

**PACS:** 02.50.Ey, 05.10.Gg, 05.40.Jc, 04.90.+e

## INTRODUCTION

It is probably fair to say that Stochastic Process Theory originated with Einstein's 1905 study on Brownian motion [1]. The theory has since developed into a full grown branch of Mathematics and its current applications include Physics, Chemistry, Biology and Economy [2, 3]. As far as Physics is concerned, one had to wait until the 70's to see what started as an attempt to describe non quantum Galilean diffusions being extended to include Galilean quantum processes [2, 4]; but the wait for a relativistic extension was even longer, since the first paper dealing with a relativistic stochastic process of clear physical interpretation was only published in 1997 [5]. Various relativistic stochastic processes have since then been considered by several authors; it is the ambition of this contribution to propose of short and self-contained review of this growing literature. The material is organized as follows. Section 2 is devoted to the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process (ROUP) constructed by F. Debbasch, K. Mallick and J.P. Rivet in 1997. Section 2.1 presents the process in flat space-time. Section 2.2 deals with the so-called hydrodynamical limit of this process. Section 2.3 extends the process to a family of curved space-time diffusions and addresses a recent work on cosmological diffusions. A general relativistic H-Theorem is also mentioned. Section 3 is devoted to the other existing relativistic processes. Section 3.1 deals with a process recently considered by J. Franchi and Y. Le Jan [6]; this process can certainly not be interpreted as a standard physical diffusion and its only possible physical interpretation [7] is discussed in Section 3.1. Section 3.2 deals with a process [8] introduced by J. Dunkel and P. Hänggi in 2005 and which is best considered as an alternative to the ROUP. The more recent numerical and analytical work done by these authors on binary collisions and non Markovian processes is also reviewed. Section 3.3 discusses the relativistic Brownian motion developed by O. Oron and L.P. Horwitz [9]. Finally, Section 4 lists a few interesting directions in which reasearch on relativistic stochastic processes could develop in the next few years.

## THE RELATIVISTIC ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS

### The ROUP in flat space-time

The ROUP can be interpreted as describing the relativistic diffusion of a point particle of mass  $m$  in a fluid characterized by a 4-velocity field  $U$ . This process has been originally introduced [5] in the special case where the space-time is flat and where  $U$  is point-independent. It is then particularly convenient to choose as reference frame the global rest-frame  $\mathcal{R}$  of the fluid in which the particle diffuses. The stochastic equations defining the process read in this frame:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})} dt \\ d\mathbf{p} &= -\alpha \frac{\mathbf{p}}{\gamma(\mathbf{p})} dt + \sqrt{2D} d\mathbf{B}_t \end{aligned} \tag{1}$$

Here,  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$  are the position and momentum of the diffusing particle and the expression of the Lorentz factor as a function of  $\mathbf{p}$  reads  $\gamma(\mathbf{p}) = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/m^2c^2}$ ; the positive coefficient  $\alpha$  determines the amplitude of the frictional force experienced by the particle while  $D$  fixes the amplitude of the noise term ( $\mathbf{B}_t$  is the usual 3-D Brownian motion).

The forward Kolmogorov equation obeyed by the time-dependent phase-space density  $\Pi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ <sup>1</sup> of the diffusing particle is then [5]:

$$\partial_t \Pi + \partial_{\mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) - \alpha \partial_{\mathbf{p}} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = D \Delta_{\mathbf{p}} \Pi. \quad (2)$$

This equation admits as solution the equilibrium Jüttner distribution:

$$\Pi_J(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{Q^2 K_2(1/Q^2)} \exp\left(-\frac{\gamma(\mathbf{p})}{Q^2}\right) \quad (3)$$

where  $K_2$  is the second order modified Hankel function and  $Q^2 m^2 c^2 = D/\alpha$ . The distribution  $\Pi_J$  is normalized to unity with respect to the measure  $d^3 p$ . The temperature  $T$  of the equilibrium is defined by  $k_B T/mc^2 = Q^2$ . One thus has:

$$\alpha = \frac{D}{mk_B T} \quad (4)$$

which is a *bona fide* special relativistic fluctuation-dissipation theorem. It has furthermore been confirmed by direct numerical simulation [5] that an arbitrary physically reasonable phase-space density does relax in time towards the Jüttner distribution (3).

The equations governing the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process can naturally be written down in an arbitrary inertial frame. This will not be discussed here; the interested reader is referred to the original publications [10, 11] and to Section 2.3 of the present contribution, which contains an explicit presentation of the process in an arbitrary, not necessarily inertial frame. Let us also mention that the stochastic equations (1) can be rewritten using the proper-time  $s$  of the particle as time-variable; the corresponding Ito process is described in [12].

## Hydrodynamical limit in flat space-time

By definition, the hydrodynamical limit of an arbitrary transport phenomenon corresponds to situations where all quantities characterizing the system vary on ‘large’ scale only, both in time and in space. For the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process described in the previous section, the hydrodynamical limit [13] addresses situations in which the time and space variation scales of the distribution function  $\Pi$  in  $\mathcal{R}$  are respectively much larger than the characteristic time  $\tau = 1/\alpha$  and the mean free path  $\lambda = \tau \sqrt{k_B T/m}$  (see equation (4) above for the definition of  $T$  in terms of  $\alpha$ ,  $D$  and  $m$ ). Technically, the hydrodynamical limit is studied by performing a Chapman-Enskog expansion around the local equilibrium distribution  $\Pi_0 = (1/4\pi Q^2 K_2(1/Q^2)) \times n(t, \mathbf{r}) \exp(-\gamma(\mathbf{p})/Q^2)$  where  $n(t, \mathbf{r})$  is the spatial density of the diffusing particle in  $\mathcal{R}$ ; the hydrodynamical equation verified by  $n$  then appears a necessary condition for the expansion to exist.

Performing a Chapman-Enskog expansion on the ROUP [13] leads at all orders to  $\partial_t n = \frac{\lambda^2}{\tau} \Delta n = \chi \Delta n$ , which is of course the standard diffusion equation. This result is quite surprising. Indeed, the dynamics of the ROUP is relativistic and, hence causal in Einstein’s sense *i.e.* it does not allow faster than light transport. On the other hand, the diffusion equation is parabolic (as opposed to hyperbolic) and does imply faster than light transport.

This apparent contradiction can be resolved by remembering that, by definition of the hydrodynamical limit, the diffusion equation describes the correct behaviour of the density  $n$  associated with the ROUP only in situations where the characteristic variation scales of this density are much larger than  $1/\alpha$  and  $\lambda$ . Applying these restrictions to the Gaussian Green function  $G(t, \mathbf{r})$  of the diffusion equation leads to  $1/\alpha \ll t$  and  $|\mathbf{r}/t| \ll \lambda/\tau$ ; the second inequality implies [13]  $|\mathbf{r}/t| \ll c$ . Since  $G$  represents the time-evolution of a density profile initially concentrated on the point  $\mathbf{r} = 0$ , the last inequality essentially states that the diffusion equation is only valid well inside the light cone originating at  $\mathbf{r} = 0$ , *i.e.* for effective diffusion velocities much smaller than  $c$ . Thus, the diffusion equation describes correctly the time-evolution of the density  $n$  associated with the ROUP only at points of space-time where it does not contradict Einstein’s causality [13].

---

<sup>1</sup> This density is defined with respect to the Lebesgue measure  $d^3 r d^3 p$



This situation parallels exactly some challenging properties of hydrodynamical limit of the relativistic Boltzmann equation. Indeed, performing a Chapman-Enskog expansion on the solution of the relativistic Boltzmann equation delivers the so-called first order hydrodynamical theories which, like the diffusion equation, permit faster than light transport [14]. This has long been recognized as troublesome [15], but it seemed to elude any reasonable interpretation. Studying the hydrodynamical limit of the ROUP has furnished the answer: effective equations governing the dynamics of macroscopic fields in the hydrodynamical limit formally permit faster than light transport, but such equations are only physically valid in restricted domains of space-time where faster than light transport does not occur and where their solutions therefore do not contradict Einstein's causality. Thus, it seems the only way to describe a relativistic continuous medium through local equations which do not permit faster than light transport is to work within the framework of statistical physics (typically, stochastic processes or traditional kinetic theory).

## Curved space time generalizations

The special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process is susceptible of an infinity of curved space-time generalizations. Those considered so far [16, 17] are fully characterized by the velocity field  $U$  of the fluid in which the particle diffuses, by a friction coefficient  $\alpha$  and a noise coefficient  $D$ ; both  $\alpha$  and  $D$  are allowed to depend on position and momentum.

All calculations can be made manifestly covariant by introducing an unphysical distribution function  $f$  defined over an 8-D phase-space  $\mathcal{S} = \{(x, q)\}$ , where  $q$  represents a covariant, possibly off-shell particle momentum. Given an arbitrary coordinate system, the distribution  $f$  is related to the physical distribution function  $\Pi$  to be used in this system by an equation of the form:

$$\Pi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int f(x, p) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0, \quad (5)$$

where the  $\delta$  distribution enforces a mass-shell restriction. Integrating  $\Pi$  against  $d^3q/\sqrt{-\det g}$  delivers the spatial particle density  $n(t, \mathbf{r})$ , which can in turn be integrated against  $\sqrt{-\det g} d^3r$ . Further details over the measures against which  $\Pi$  can be integrated can be found in [16].

A curved space-time generalization of the process discussed in the previous section is then fully defined by a transport equation obeyed by  $f$ . The most natural equation [16, 17] reads:

$$\mathcal{D}_\mu (g^{\mu\nu}(x) p_\nu f) + \frac{\partial}{\partial p_\mu} (mc F_{d\mu} f) + K^\mu{}_\rho{}^\beta{}_\nu \partial_{p_\rho} \left( D(x, p) \frac{p_\mu p_\beta}{p_\alpha U^\alpha} \partial_{p_\nu} f \right) = 0, \quad (6)$$

where  $\mathcal{D}_\mu = \left( \nabla_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right)$  represents a covariant derivative at momentum covariantly constant (here, the  $\Gamma$ 's are the usual Christoffel symbols of the metric  $g$ ) [15]. The deterministic force  $F_d$  is defined by

$$F_{d\mu} = -\lambda_\mu{}^\nu p_\nu \frac{g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{m^2 c^2} + \lambda^{\alpha\beta} \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2 c^2} p_\mu \quad (7)$$

and the friction tensor  $\lambda$  reads

$$\lambda^{\mu\nu} = \frac{\alpha(x, p)(mc)^2}{(p_\mu U^\mu)^2} \mathcal{P}^{\mu\nu} \quad (8)$$

where  $\mathcal{P}$  is the projector onto the orthogonal to  $U$ :  $\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu$ . Finally, the tensor  $K$  is defined in terms of  $\mathcal{P}$  and  $U$  by:

$$K^{\mu\rho\beta\nu} = U^\mu U^\beta \mathcal{P}^{\rho\nu} - U^\mu U^\nu \mathcal{P}^{\rho\beta} + U^\rho U^\nu \mathcal{P}^{\mu\beta} - U^\rho U^\beta \mathcal{P}^{\mu\nu}. \quad (9)$$

This class of processes can be used to model the diffusion of a particle in a fluid comoving with the expansion of a spatially flat Friedmann-Robertson-Walker universe. The time-evolution of the thermodynamical state of the matter in the universe can be approximately characterized by a time-dependent temperature  $T(t)$ . It is then natural to wonder if some processes defined by an equation of the form (6) admit the Jüttner distribution of temperature  $T(t)$  as possible momentum distribution. A positive answer to this question has been given in [18, 17] for all possible choices of  $a(t)$  and  $T(t)$  and the coefficients  $\alpha$  and  $D$  of the corresponding processes obey a generalized fluctuation dissipation theorem.

Let us also mention that the processes defined by (6) verify a remarkable  $H$ -theorem [19]<sup>2</sup>; this theorem, which states that the 4-divergences of certain conditional entropy 4-currents associated with (6) are always non-positive, is valid in any general relativistic space-time, including those containing closed time-like curves<sup>3</sup>.

## OTHER RELATIVISTIC PROCESSES

### ‘Intrinsic’ Brownian Motion

This process was introduced [6] by J. Franchi and Y. Le Jan in 2004 and is based on ideas originally developed by R.M. Dudley [21] in 1965. To keep the discussion as simple as possible, let us focus on the flat space-time version of this process. A physically intuitive definition of the process is given by the following equation of motion:

$$d\mathbf{p}_* = \sqrt{2\mathcal{D}}d\mathbf{B}_s, \quad (10)$$

where  $s$  stands for the proper-time along a stochastic time-like curve and  $d\mathbf{p}_*/ds$  designates what physicists would call the proper acceleration along that curve. Note that equation (10) looks like a standard stochastic differential equation but is *not*; indeed, by definition, the proper momentum  $\mathbf{p}_*$  along a time-like curve vanishes for all values of  $s$ . Thus, to be integrated as a usual stochastic differential equation, (10) has first to be converted into an equation fixing the differential of the momentum  $\mathbf{p}$  associated with the same world-line, but in another,  $s$ -independent inertial frame.

Though quite natural from a mathematical point of view, this process is not susceptible of any simple physical interpretation. Indeed, usual diffusions of a point particle are physically generated by the interaction of this particle with a surrounding continuous medium; the stochastic equation (10) does not however contain any information pertaining to such a medium<sup>4</sup>; it is therefore far from obvious what kind a physics would induce a diffusion like (10). Dowker et al. [7] have suggested that (10) may be interpreted as an effective diffusion induced by quantum fluctuations of the space-time structure itself and this seems to be the only possible interpretation of (10). Note also that, contrary to the ROUP, there is no inertial frame in which the process (10) admits an invariant measure in momentum space. There is *a fortiori* no fluctuation-dissipation theorem for (10).

Let us finally mention that the curved space-time version of the process has been studied in detail by Franchi and Le Jan in the particular case where the background space-time is the Kruskal extension of the Schwarzschild metric [6]; diffusions in the Gödel universe have been considered by Franchi in [22] and the asymptotic behaviour of the Franchi-Le Jan process in Minkowski space-time has been recently fully characterized by I. Bailleul and Y. Le Jan [23].

### The Relativistic Brownian Motion of Dunkel and Hänggi

Dunkel and Hänggi’s process can be viewed as an attempt to modify Franchi and Le Jan’s process to obtain a new model in which the special relativistic diffusion of a particle is driven by its interaction with a surrounding fluid. As such, Dunkel and Hänggi’s process presents itself as a potential alternative to the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process (see Section 2.1); the common points and differences between the two processes will be discussed at the end of the current Section.

As J. Franchi and Y. Le Jan, J. Dunkel and P. Hänggi start their construction in the proper rest frame of the diffusing particle, but they naturally extend it to all inertial frames. Dunkel and Hänggi’s process can be defined by the following stochastic equation, valid in the (global) rest frame of the fluid in which the particle diffuses [8, 24]:

$$dp^i = -v^i dt + \sqrt{2D}\mathcal{L}_j^i(\mathbf{p})dB_t^j. \quad (11)$$

<sup>2</sup> This reference only envisages processes with constant  $\alpha$  and  $D$  but the given proof can be straightforwardly extended to include all processes in the class defined by (6)

<sup>3</sup> Standard examples of such space-times are the Gödel universe and the Kerr black hole [20]

<sup>4</sup> Quite generally, the diffusion process introduced by Franchi and Le Jan involves only the metric of space-time. Hence the qualifier ‘intrinsic’ chosen by the present author to characterize this process

where  $\nu$  is a positive friction coefficient. Here, the tensorial multiplicative noise  $\mathcal{L}_j^i(\mathbf{p})$  has to be understood, not in the Ito nor in the Stratonovich sense, but in the so-called Hänggi-Klimontovich manner<sup>5</sup> if one wants the forward Kolmogorov equation associated with (11) to admit Jüttner distribution (3) as an invariant measure in  $\mathbf{p}$ -space.

The process defined by (11) presents important similarities with the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process (see Section 2). Both share the same invariant measure in  $\mathbf{p}$ -space and both obey simple fluctuation-dissipation theorems. The main difference between both processes lies in the choice of noise. The noise used in the special relativistic Ornstein-Uhlenbeck process is a Gaussian white noise in the proper frame of the fluid which surrounds the diffusing particle; on the other hand, the noise in (11) is a Gaussian white noise in the proper frame of the diffusing particle. A detailed study of how this difference influences the relaxation towards the invariant measure in  $\mathbf{p}$ -space is still lacking. In particular, the hydrodynamical limit has not been worked out on Dunkel and Hänggi's process yet. No general relativistic extension has been considered either.

Dunkel and Hänggi have recently extended their work on relativistic Brownian motions in various directions. They have indeed introduced and studied numerically binary collisions models [25] which suggest that fully realistic relativistic processes might very well have to be non Markovian in both momentum and position spaces. This work has been followed by another one [26] where the authors propose two simple non Markovian models of relativistic diffusions in position space only. These two models are however not related to non Markovian diffusions in momentum space, but rather introduced as simple models satisfying certain list of minimal physical requirements.

Dunkel and Hänggi have also interpreted the results of numerical simulations of binary collisions [27] to suggest that the Jüttner distribution is *not* the correct equilibrium distribution of dilute special relativistic perfect gases; the alternative distribution considered in [27] has been further supported by Dunkel, Talkner and Hänggi through a theoretical maximum entropy argument [28]. It is our opinion that the Jüttner distribution is correct and that the argumentation developed in [27, 28] is not adequate because it relies in a crucial way on non covariant equations; actually, the numerical simulations presented in [27] *do* support the Jüttner distribution if they are properly interpreted through covariant definitions of averaged quantities; and so does the argument presented in [28]. This point, which will be fully explored in a forthcoming publication, cannot be elaborated upon here; let us simply note that the Jüttner distribution is the dilute gas limit of the Bose-Einstein (BE) and the Fermi-Dirac (FD) distributions [29, 15]. The alternative distribution considered in [27, 28] thus conflicts with both the BE and FD statistics, which are direct consequences of quantum field theory [30, 31, 32]. Thus, the alternative distribution conflicts with what is currently the most precise model of matter, confirmed by countless experiments. Let us also remark that the applicability of BE statistics to relativistic particles is itself experimentally confirmed by all observations of black body radiation [33].

## The Relativistic Brownian Motion of Oron and Horwitz

O. Oron and L.P. Horwitz suggest [9] that the diffusion of a special relativistic point mass under the action of an external force  $\beta(x)$  should be described by the following generalization of Smoluchowski equation:

$$\partial_\tau \rho = -\partial_\mu (\beta^\mu \rho) + D \partial_\mu \partial^\mu \rho, \quad (12)$$

where  $D$  is a positive coefficient and  $\rho$  is a function of both  $x$  and a certain ‘universal’ time  $\tau$ . Various possible microscopic justifications for (12) are elaborated upon in [9].

Equation (12) as it stands presents various problems. First, the physical meaning of  $\tau$  remains unclear, not to mention the fact that introducing a ‘universal’ time in a special relativistic framework might seem unnatural; also unclear is the measure against which  $\rho$  should be integrated. Furthermore, equation (12) does not contain any explicit reference to a fluid surrounding the diffusing particle; thus, like Franchi and Le Jan's process, the physical interpretation of Oron and Horwitz's model is at best problematical.

A final point should be mentioned. Even if equation (12) is certainly an original contribution of O. Oron and L.P. Horwitz, the idea to describe transport phenomena by hyperbolic equations instead of parabolic ones is not that recent; it has been probably first proposed by C. Cattaneo [34] and found its most developed expression to date in the construction of the so-called Extended Thermodynamics theories [35, 36]. These theories present serious physical problems in their own right (see [15, 35] and the discussion at the end of Section 2.2 above) but they certainly deserve attention. They fall outside the context of this review because they are not based on stochastic processes; a thorough

---

<sup>5</sup> This amounts to evaluating the multiplicative noise at the end of the stochastic jump

comparison of the diffusion models constructed according to the principles of Extended Thermodynamics and the Relativistic Brownian Motion of Oron and Horwitz should nevertheless prove to be very rewarding.

## CONCLUSION

The last ten years have witnessed an important activity around relativistic diffusion processes (in chronological order: [5, 13, 10, 11, 16, 9, 6, 19, 8, 24, 18, 27, 28, 25, 26, 22, 17, 37]). The model most developed today is certainly the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. A priority for future research seems to better our understanding of the other models of relativistic diffusion discussed in this review and to systematically compare their physical predictions to those of the ROUP. It has also been remarked that curvature, even in a purely Galilean context, can profoundly affect the phenomenology of diffusion [38, 39, 37]; general relativistic diffusions should therefore become the objects of renewed scrutiny. Finally, describing stochastically the evolution of both Riemannian and Lorentzian manifolds is a problem certainly worthy of all attention.

## REFERENCES

1. A. Einstein, *Investigations on the Theory of Brownian Motion*, Reprint of the 1st English edition (1926), Dover, New-York, 1956.
2. N. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
3. B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, 5th edn, Springer-Verlag, 1998.
4. C. Gardiner, and P. Zoller, *Quantum Noise*, 2nd. enlarged edn, Springer-Verlag, New-York, 2000.
5. F. Debbasch, K. Mallick, and J.P. Rivet, *J. Stat. Phys.* **88**, 945-966 (1997).
6. J. Franchi, and Y. Le Jan, *arXiv math.PR/0410485* (2004).
7. F. Dowker, J. Henson, and R. Sorkin, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 1829–1840 (2004).
8. J. Dunkel, and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **71**, 016124 (2005).
9. O. Oron, and L. Horwitz, *arXiv:math-ph/0312003 v1* (2003).
10. C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet, *Eur. Phys. J. B* **19**, 37-47 (2001).
11. C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet, *Eur. Phys. J. B* **23**, 487-496 (2001).
12. C. Barbachoux, *Etude de quelques propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste. Thèse.*, Université Paris 6, 2000.
13. F. Debbasch, and J.P. Rivet, *J. Stat. Phys.* **90**, 1179-1199 (1998).
14. W. Hiscock, and L. Lindblom, *Phys. Rev. D* **31**, 725-733 (1985).
15. W. Israel, "Covariant Fluid Mechanics and Thermodynamics: An Introduction," in *Relativistic Fluid Dynamics*, edited by A. Anile, and Y. Choquet-Bruhat, vol. 1385 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 152-210.
16. F. Debbasch, *J. Math. Phys.* **45**, 2744-2760 (2004).
17. C. Chevalier, and F. Debbasch, *J. Math. Phys.* **48**, 023304 (12 pages) (2007).
18. C. Chevalier, and F. Debbasch, "Stochastic relativistic processes and fluctuation-dissipation theorems," in *Proceedings of the ISTP17, Toyama, 2006*, 2006.
19. M. Rigotti, and F. Debbasch, *J. Math. Phys.* **46**, 103303 (11 pages) (2005).
20. S. Hawking, and G. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
21. R. Dudley, *Arkiv f. Mat.* **6**, 241–268 (1965).
22. J. Franchi, *arXiv:math.PR/0612020 v1* (2006).
23. I. Bailleul, *Doctoral Thesis*, University Paris 11, 2007.
24. J. Dunkel, and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **72**, 036106 (11 pages) (2005).
25. J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi, *arXiv:cond-math/0607082 v4* (2006).
26. J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi, *arXiv:cond-math/0608023 v2* (2006).
27. J. Dunkel, and P. Hänggi, *Phys. A* **374**, 559–572 (2007).
28. J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi, *arXiv:cond-math/0610045 v2* (2006).
29. S. de Groot, W. van Leeuwen, and C. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications*, North-Holland, 1978.
30. R. Feynman, *Statistical Mechanics. A set of Lectures*, Addison-Wesley Publishing Company, inc., 1972.
31. C. Itzikson, and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw and Hill, 1980.
32. R. Haag, *Local Quantum Physics*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
33. F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, Auckland, 1965.
34. C. Cattaneo, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **3** (1948).
35. I. Müller, and T. Ruggeri, *Extended Thermodynamics*, vol. 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Springer-Verlag, New-York, 1993.
36. D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics*, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

37. C. Chevalier, and F. Debbasch, “Diffusion Processes on Manifolds,” in *Submitted to the proceedings of the Kurtzfest, Madison, 2006*, 2007.
38. F. Debbasch, and M. Moreau, *Phys. A* **343**, 81–104 (2004).
39. C. Chevalier, and F. Debbasch, *EPL* **77**, 20005–20009 (2007).

C. Chevalier and F. Debbasch. Brownian motion and entropy growth on irregular surfaces. Submitted in ‘Proceedings of Analysis and simulation of multiscale nonlinear systems, Oregon State University, Corvallis, Oregon, 2007’.

# Brownian Motion and Entropy Growth on irregular Surfaces

C. Chevalier\* and F. Debbasch†

Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA,  
3 rue Galilée, 94200 Ivry, France.

29th September 2007

## Abstract

Many situations of physical and biological interest involve diffusions on manifolds. It is usually assumed that irregularities in the geometry of these manifolds do not influence diffusions. The validity of this assumption is put to the test by studying Brownian motions on nearly flat 2D surfaces. It is found by perturbative calculations that irregularities in the geometry have a cumulative and drastic influence on diffusions, and that this influence typically grows exponentially with time. The corresponding characteristic times are computed and discussed. Conditional entropies and their growth rates are considered too.

**Keywords:** Brownian motion, stochastic processes on manifolds, lateral diffusions.

## 1 Introduction

Stochastic process theory is one of the most popular tools used in modelling time-asymmetric phenomena, with applications as diverse as economics ([21, 22]), traffic management ([20, 15]), biology ([16, 2, 10, 8]), physics ([23]) and cosmology ([5]). Many diffusions of biological interest, for example the lateral diffusions ([4, 17]), can be modelled by stochastic processes defined on differential manifolds ([12, 13, 9, 18]). In practice, the geometry of the manifold is never known with infinite precision, and it is common to ascribe to the manifold an approximate, mean geometry and to assume irregularities in the geometry have, in

---

\*chevalier\_claire@yahoo.fr

†fabrice.debbasch@gmail.com

the mean, a negligible influence on diffusion phenomena ([4, 1, 3, 6, 19]). The aim of this article is to investigate if this last assumption is indeed warranted.

To this end, we fix a base manifold  $\mathcal{M}$  and focus on Brownian motion. We introduce two metrics on  $\mathcal{M}$ . The first one,  $g$ , represents the real, irregular geometry of the manifold; what an observer would consider as the approximate, mean geometry is represented by another metric, which we call  $\bar{g}$ ; to keep the discussion as general as possible, both metrics are allowed to depend on time.

We compare the Brownian motions in the approximate metric  $\bar{g}$  to those in the real, irregular metric  $g$  by comparing their respective densities with respect to a reference volume measure, conveniently chosen as the volume measure associated to  $\bar{g}$ . Explicit computations are presented for diffusions on nearly flat 2D surfaces whose geometry fluctuates on spatial scales much smaller than the scales on which these diffusions are observed. We investigate in particular if the densities generated by Brownian motions in the real, irregular metric  $g$  coincide on large scales with the densities generated by Brownian motions in the approximate metric  $\bar{g}$ . We perform a perturbative calculation and find that, generically, these densities differ, even on large scales, and that the relative differences of their spatial Fourier components grow exponentially in time; on a given surface, the characteristic time  $\tau$  at which the perturbative terms become comparable (in magnitude) to the zeroth order terms depends on the amplitude  $\varepsilon$  of the irregularities and on the large scale wave vector  $k$  at which diffusions are observed; we find that  $\tau$  generally scales as  $-\left(\nu^{-2} \ln(\varepsilon/\nu^{1/2})\right) \times \left(1/|K^*|^2 \chi\right)$ , where  $\chi$  is the diffusion coefficient and  $\nu = |k|/|K^*|$ ,  $K^*$  being a typical wave-vector characterizing the metric irregularities. Our general conclusion is that geometry fluctuations have a cumulative effect on Brownian motion and that their influence on diffusions cannot be neglected.

## 2 Brownian motions on a manifold

### 2.1 Brownian motion in a time-independent metric

Let  $\mathcal{M}$  be a fixed real base manifold of dimension  $d$ . Let  $g$  be a time-independent metric on  $\mathcal{M}$ . This metric endows  $\mathcal{M}$  with a natural volume measure which will be denoted hereafter by  $d\text{Vol}_g$ . If  $C$  is a chart on  $\mathcal{M}$  with coordinates  $x = (x^i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , integrating against  $d\text{Vol}_g$  comes down to integrating against  $\sqrt{\det g_{ij}} d^d x$ , where the  $g_{ij}$ 's are the components of  $g$  in the coordinate basis associated to  $C$ .

There is a canonical definition of a Brownian motions on  $\mathcal{M}$  equipped with metric  $g$  ([14, 9, 11, 18]). Quite intuitively, these Brownian motions are defined through the diffusion equation obeyed by their densities  $n$  with respect to  $d\text{Vol}_g$ . Given an arbitrary positive diffusion constant  $\chi$ , this equation reads:

$$\partial_t n = \chi \Delta_g n, \quad (1)$$



where  $\Delta_g$  is the Laplace-Beltrami operator associated to  $g$  ([7]); given a chart  $C$  with coordinates  $x$ , one can write:

$$\Delta_g n = \frac{1}{\sqrt{\det g_{kl}}} \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}} g^{ij} \partial_j n \right), \quad (2)$$

where  $\partial_i$  represents partial derivation with respect to  $x^i$  and the  $g^{ij}$ 's are the components of the inverse of  $g$  in the coordinate basis associated to  $C$ . Observe that one of the reasons why this definition makes sense is that the diffusion equation (1) conserves the normalization of  $n$  with respect to  $d\text{Vol}_g$ .

## 2.2 Brownian motion in a time-dependent metric

The preceding definition of Brownian motion cannot be used in this case because the diffusion equation (1) does not conserve the normalization of  $n(t)$  with respect to the volume measure  $d\text{Vol}_{g(t)}$  associated to a time-dependent metric. To proceed, we introduce an arbitrary, time-independent metric  $\gamma$  on  $\mathcal{M}$ , denote by  $\mu_{g(t)|\gamma}$  the density of  $d\text{Vol}_{g(t)}$  with respect to  $d\text{Vol}_\gamma$ , and define the Brownian motion in the time-dependent metric  $g(t)$  as the stochastic process whose density  $n$  with respect to  $d\text{Vol}_{g(t)}$  obeys the following generalized diffusion equation:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t \left( \mu_{g(t)|\gamma} n \right) = \chi \Delta_{g(t)} n. \quad (3)$$

Given an arbitrary coordinate system  $(x)$ , equation (3) transcribes into:

$$\partial_t \left( \sqrt{\det g_{kl}} n \right) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}} g^{ij} \partial_j n \right), \quad (4)$$

which shows that the Brownian motion in  $g(t)$  does not actually depend on  $\gamma$ . Moreover,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} n &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_\gamma \mu_{g(t)|\gamma} n \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_\gamma \partial_t \left( \mu_{g(t)|\gamma} n \right) \\ &= \chi \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_\gamma \mu_{g(t)|\gamma} \Delta_{g(t)} n \\ &= \chi \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} \Delta_{g(t)} n \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Thus, contrary to (1), equation (3) conserves the normalization of  $n(t)$ .

### 2.3 Entropies of Brownian motion in a time-dependent metric

Let  $n$  and  $\tilde{n}$  be two solutions of (3). We define the time-dependent conditional entropy  $S_{n|\tilde{n}}$  of  $n$  with respect to  $\tilde{n}$  by:

$$S_{n|\tilde{n}}(t) = - \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} n \ln\left(\frac{n}{\tilde{n}}\right). \quad (6)$$

This entropy is a non decreasing function of  $t$ . This can be seen by the following calculation. One can write:

$$S_{n|\tilde{n}}(t) = - \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{\gamma} \mu_{g(t)|\gamma} n \ln\left(\frac{\mu_{g(t)|\gamma} n}{\mu_{g(t)|\gamma} \tilde{n}}\right), \quad (7)$$

which leads to

$$\begin{aligned} \frac{dS_{n|\tilde{n}}}{dt} &= - \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{\gamma} \left( \partial_t(\mu_{g(t)|\gamma} n) \ln\left(\frac{\mu_{g(t)|\gamma} n}{\mu_{g(t)|\gamma} \tilde{n}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \mu_{g(t)|\gamma} n \frac{\mu_{g(t)|\gamma} \tilde{n} \partial_t(\mu_{g(t)|\gamma} n) - \mu_{g(t)|\gamma} n \partial_t(\mu_{g(t)|\gamma} \tilde{n})}{\mu_{g(t)|\gamma}^2 n \tilde{n}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Equation (3) can then be used to transform all temporal derivatives into spatial ones and one obtains:

$$\frac{dS_{n|\tilde{n}}}{dt} = -\chi \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} \left( \Delta_{g(t)} n \left( \ln\left(\frac{n}{\tilde{n}}\right) + 1 \right) - \frac{n}{\tilde{n}} \Delta_{g(t)} \tilde{n} \right). \quad (9)$$

Integrating by parts delivers:

$$\frac{dS_{n|\tilde{n}}}{dt} = +\chi \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} \tilde{n} \left( \nabla \left( \ln \frac{n}{\tilde{n}} \right) \right)^2, \quad (10)$$

which proves the expected result. Conditional entropies of Brownian motions thus obey a very simple  $H$ -theorem, even in time-dependent geometries.

The Gibbs entropy  $S_G[n]$  of a density  $n$  is defined by

$$S_G[n](t) = - \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{g(t)} n \ln n. \quad (11)$$

The  $H$ -theorem above applies to  $S_G[n]$  only if the  $\tilde{n} = 1$  is a solution of the transport equation (3). This is automatically the case if the metric  $g$  is time-independent, but may not be true in time-dependent metrics. Note also that a uniform density is not normalizable on non compact manifolds.

### 3 How to compare Brownian motions in different metrics

Let  $\mathcal{M}$  be a real differential manifold of dimension  $d$ . We first introduce on  $\mathcal{M}$  a metric  $\bar{g}(t)$  which describes what an observer would consider as the approximate, mean geometry of the manifold. The real, irregular geometry of  $\mathcal{M}$  is described by a different metric  $g(t)$ .

Consider an arbitrary point  $O$  in  $\mathcal{M}$  and let  $B_t$  be the Brownian motion in  $g(t)$  that starts at  $O$ . The density  $n$  of  $B_t$  with respect to  $d\text{Vol}_{g(t)}$  obeys the diffusion equation:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{g(t)|\gamma} n) = \chi \Delta_{g(t)} n. \quad (12)$$

We denote by  $\bar{B}_t$  the Brownian motion in  $\bar{g}(t)$  that starts at point  $O$  and by  $\bar{n}$  its density with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ ; this density obeys:

$$\frac{1}{\mu_{\bar{g}(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{\bar{g}(t)|\gamma} \bar{n}) = \chi \Delta_{\bar{g}(t)} \bar{n}. \quad (13)$$

We will compare the two Brownian motions by comparing on large scales their respective densities with respect to a reference volume measure on  $\mathcal{M}$ . From an observational point of view, the best choice is clearly  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ , the volume measure associated to the approximate, mean geometry of the manifold. The density  $N$  of  $B_t$  with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$  is given in terms of  $n$  by:

$$N = \mu_{g(t)|\bar{g}(t)} n, \quad (14)$$

where  $\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}$  is the density of  $d\text{Vol}_{g(t)}$  with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$ . The transport equation obeyed by  $N$  can be deduced from (12) and reads:

$$\frac{1}{\mu_{g(t)|\gamma}} \partial_t (\mu_{\bar{g}(t)|\gamma} N) = \chi \Delta_{g(t)} \left( \frac{1}{\mu_{g(t)|\bar{g}(t)}} N \right). \quad (15)$$

In a chart  $C$  with coordinates  $(x)$ , (14) transcribes into:

$$N(t, x) = \frac{\sqrt{\det g_{ij}(t, x)}}{\sqrt{\det \bar{g}_{ij}(t, x)}} n(t, x) \quad (16)$$

and (15) becomes:

$$\partial_t \left( \sqrt{\det \bar{g}_{kl}(t, x)} N(t, x) \right) = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}(t, x)} g^{ij}(t, x) \partial_j \frac{\sqrt{\det \bar{g}_{kl}(t, x)}}{\sqrt{\det g_{kl}(t, x)}} N(t, x) \right). \quad (17)$$

Let  $N$  and  $\tilde{N}$  be the densities with respect to  $d\text{Vol}_{\bar{g}(t)}$  corresponding to two solutions  $n$  and  $\tilde{n}$  of equation (3). The conditional entropy of  $n$  with respect to  $\tilde{n}$  can also be written:

$$S_{n|\tilde{n}}(t) = - \int_{\mathcal{M}} d\text{Vol}_{\bar{g}(t)} N \ln\left(\frac{N}{\tilde{N}}\right). \quad (18)$$

This entropy can thus be also interpreted as the conditional entropy of  $N$  with respect to  $\tilde{N}$  on the manifold equipped with metric  $\bar{g}(t)$ . Note however that the Gibbs entropy of  $n$  in  $g(t)$  does not coincide with the Gibbs entropy of  $N$  in  $\bar{g}(t)$ .

The main question investigated in this article is: how does the density  $N$  obeying (15) differ on large scales from the density  $\tilde{n}$  obeying (13)? Since this question is extremely difficult to solve in its full generality, we now concentrate on nearly flat 2D surfaces.

## 4 Brownian motions on nearly flat 2D surfaces

### 4.1 The problem

We choose  $\mathbb{R}^2$  as base manifold  $\mathcal{M}$  and retain  $\bar{g} = \eta$ , the flat Euclidean metric on  $\mathbb{R}^2$ . The real, irregular metric of the manifold is still denoted by  $g(t)$  and we define  $h(t)$  by  $g^{-1}(t) = \eta^{-1} + \varepsilon h(t)$ , where  $\varepsilon$  is a small parameter (infinitesimal) tracing the nearly flat character of the surface. From now on, we will use the metric  $\eta$  (resp. the inverse of  $\eta$ ) to lower (resp. raise) all indices.

Let us choose a chart  $C$  where  $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1)$ . The tensor field  $h(t)$  is then represented by its components  $h^{ij}(t, x)$ . A particularly simple but very illustrative form for these components is:

$$h^{ij}(t, x) = \sum_{nm'} h_{nm'}^{ij} \cos(\omega_{n'} t - k_n \cdot x + \phi_{nm'}), \quad (19)$$

where  $k_n \cdot x = k_{n1}x^1 + k_{n2}x^2$  and both integer indices run through arbitrary finite sets. This choice has the double advantage of leading to conclusions which are sufficiently robust to remain qualitatively valid for all sorts of physically interesting perturbations  $h$  while making all technical aspects of the forthcoming computations and discussions as simple as possible. The *Ansatz* (19) will therefore be retained in the remainder of this article. Let us remark that perturbations  $h(t)$  proportional to  $\eta$  amount to a simple modification of the conformal factor linking the 2D metric  $g(t)$  to the flat metric  $\eta$ .

Equation (17) reads, in the chart  $C$ :

$$\partial_t N = \chi \partial_i \left( \sqrt{\det g_{kl}(t, x)} g^{ij}(t, x) \partial_j \frac{N}{\sqrt{\det g_{kl}(t, x)}} \right) \quad (20)$$

or, alternately,

$$\partial_t N = \chi \partial_i \left( g^{ij}(t, x) (\partial_j N - N \partial_j l) \right), \quad (21)$$

where

$$l(t, x) = \ln \sqrt{\det g_{kl}(t, x)}. \quad (22)$$

## 4.2 General perturbative solution

The solution of (21) will be searched for as a perturbation series in the amplitude  $\varepsilon$  of the fluctuations:

$$N(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m N_m(t, x). \quad (23)$$

Setting to 0 both coordinates of the point  $O$  where the diffusion starts from, we further impose, for all  $x$ , that  $N_0(0, x) = \delta(x)$  and  $N_m(0, x) = 0$  for all  $m > 0$ .

The function  $l(t, x)$  can be expanded in  $\varepsilon$ , so that  $l(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m l_m(t, x)$  and one finds, for the first three contributions:

$$\begin{aligned} l_0(t, x) &= 0 \\ l_1(t, x) &= -\frac{1}{2} \eta_{ij} h^{ij}(t, x) \\ l_2(t, x) &= \frac{1}{4} \eta_{ik} \eta_{jl} h^{ij}(t, x) h^{kl}(t, x). \end{aligned} \quad (24)$$

Equation (21) can then be rewritten as the system

$$\partial_t N_m = \chi \Delta_\eta N_m + \chi S_m[h, N_r], m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_{m-1} \quad (25)$$

where the source term  $S_m$  is a functional of the fluctuation  $h$  and of the contributions to  $N$  of order strictly lower than  $m$ . In particular,

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= \partial_i \left( h^{ij} \partial_j N_0 + \frac{1}{2} N_0 \eta^{ij} \eta_{kl} \partial_j h^{kl} \right) \\ S_2 &= \partial_i \left( h^{ij} \partial_j N_1 + \frac{1}{2} (N_0 h^{ij} + N_1 \eta^{ij}) \eta_{kl} \partial_j h^{kl} - \frac{1}{4} N_0 \eta^{ij} \eta_{mk} \eta_{nl} \partial_j (h^{mn} h^{kl}) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Two remarks are now in order. Taken together,  $S_0(t, x) = 0$  and  $N_0(t, x) = \delta(x)$  imply that  $N_0$  coincides with the Green function of the standard diffusion equation on the flat plane:

$$N_0(t, x) = \frac{1}{4\pi\chi t} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right). \quad (27)$$

Moreover, the fact that  $S_m$  is a divergence for all  $m$  implies that the normalizations of all  $N_m$ 's are conserved in time. The initial condition  $N_m(0, x) = 0$  for all  $x$  and  $m > 0$  then implies that all  $N_m$ 's with  $m > 0$  remain normalized to zero and only

contribute to the local density of particles, and not to the total density. This is perfectly coherent with the fact that  $N_0$  is normalized to unity.

Define now spatial Fourier transforms by

$$\hat{f}(t, k) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x) \exp(-ik \cdot x) d^2 x, \quad (28)$$

where  $k \cdot x = k_1 x^1 + k_2 x^2$ . A direct calculation then delivers:

$$\hat{S}_1(t, k) = -k_i \int_{\mathbb{R}^2} A^i(t, k, k') \hat{N}_0(t, k - k') d^2 k' \quad (29)$$

where

$$\hat{N}_0(t, k) = \exp(-\chi k^2 t) \quad (30)$$

and

$$A^i(t, k, k') = (k_j - k'_j) \hat{h}^{ij}(t, k') + \frac{1}{2} \eta^{ij} k'_j \eta_{kl} \hat{h}^{kl}(t, k'). \quad (31)$$

The first order density fluctuation  $N_1$  is then obtained by solving equation (25) with (29) as source term, taking into account the initial condition  $N_1(0, x) = 0$  for all  $x$ . One thus obtains:

$$\hat{N}_1(t, k) = I_1(t, k) \exp(-\chi k^2 t) \quad (32)$$

with

$$I_1(t, k) = \int_0^t \hat{S}_1(t', k) \exp(\chi k^2 t') dt'. \quad (33)$$

Equation (26) then gives:

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(t, k) &= -k_i \int_{\mathbb{R}^2} A^i(t, k, k') \hat{N}_1(t, k - k') d^2 k' \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} B^i(t, k', k'') \hat{N}_0(t, k - k') d^2 k' d^2 k'' \end{aligned} \quad (34)$$

with

$$\begin{aligned} B^i(t, k, k') &= \frac{1}{2} k'_j \eta_{kl} \hat{h}^{kl}(t, k') \hat{h}^{ij}(t, k - k') \\ &- \frac{1}{4} \eta^{ij} k'_j \eta_{mk} \eta_{nl} \left( \hat{h}^{mn}(t, k') \hat{h}^{kl}(t, k - k') + \hat{h}^{kl}(t, k') \hat{h}^{mn}(t, k - k') \right) \end{aligned} \quad (35)$$

The second order density fluctuation  $N_2$  then reads:

$$\hat{N}_2(t, k) = I_2(t, k) \exp(-\chi k^2 t) \quad (36)$$

with

$$I_2(t, k) = \int_0^t \hat{S}_2(t', k) \exp(\chi k^2 t') dt'. \quad (37)$$

### 4.3 How the irregularities influence diffusions

#### 4.3.1 First order terms

Let us now insert *Ansatz* (19) in the above expressions (29) and (32) for  $\hat{S}_1$  and  $\hat{N}_1$ . One finds:

$$\hat{S}_1(t, k) = \sum_{nn'\sigma} A_{nn'}^\sigma(k) \exp(i\sigma(\omega_{n'}t + \phi_{nn'}) - (k + \sigma k_n)^2 \chi t) \quad (38)$$

with

$$A_{nn'}^\sigma(k) = -\frac{1}{2} \left[ k_i(k_j + \sigma k_{nj}) h_{nn'}^{ij} - \frac{1}{2} \sigma \eta^{ij} k_i k_{nj} \eta_{kl} h_{nn'}^{kl} \right] \quad (39)$$

and  $\sigma \in \{-1, +1\}$ . This leads to:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{N}_1(t, k)}{\hat{N}_0(t, k)} &= \sum_{\sigma} \left\{ \sum_{(n, n') \notin \Sigma^\sigma(k)} I_{nn'}^\sigma(k) \left[ \exp(\sigma i \omega_{n'} t - (k_n^2 + 2\sigma k \cdot k_n) \chi t) - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + t \sum_{(n, n') \in \Sigma^\sigma(k)} A_{nn'}^\sigma(k) \exp(i\phi_{nn'}) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

with

$$I_{nn'}^\sigma(k) = \frac{A_{nn'}^\sigma(k) \exp(i\phi_{nn'})}{i\sigma \omega_{n'} + (k^2 - (k + \sigma k_n)^2) \chi}, \quad (41)$$

and  $\Sigma^\sigma(k) = \{(n, n'), \sigma i \omega_{n'} + (k^2 - (k + \sigma k_n)^2) \chi = 0\}$ . Note that both sets are disjoint, unless there is an  $(n, n')$  for which  $k_n = 0$  and  $\omega_{n'} = 0$ .

This expression characterizes how Brownian motions in the irregular metric differ, at first order, from Brownian motions on the flat Euclidean plane. The dependence on the wave vector  $k$  indicates that the influence of the irregularities varies with the spatial scale at which the diffusion is observed. Two opposite situations are particularly worth commenting upon. Take a certain  $k_n$  and consider  $\hat{N}_1$  at scales characterized by wave vectors much smaller than  $k_n$ , say  $|k| \ll |k_n|$ , where  $\nu$  is an infinitesimal (small parameter). Neglecting the contributions of the frequencies  $\omega_{n'}$ , the amplitudes  $A_{nn'}^\pm(k)$  typically scale as  $|k| \ll |k_n|$ , so that the  $I_{nn'}^\pm(k)$ 's scale as  $O(\nu)$ . Note however that perturbations  $h$  proportional to  $\eta$  do not obey this typical scaling, but rather  $A_{nn'}^\pm(k) \sim k^2$ , and  $I_{nn'}^\pm(k) \sim O(\nu^2)$ . The sets  $\Sigma^\pm$  are empty and the time-dependence of  $|\hat{N}_1/\hat{N}_0|$  is controlled by the real exponentials in (40), which essentially decrease as  $\exp(-k_n^2 \chi t)$ . The first order relative contribution  $\varepsilon \hat{N}_1/\hat{N}_0$  thus tends towards a quantity  $L_1(k)$  which is linear in the  $I_{nn'}^\pm(k)$ ; the typical relaxation time is  $\tau_1 \sim 1/(\chi k_n^2)$ , which is much smaller than the diffusion time  $1/(\chi k^2)$  associated to scale  $k$ . Moreover, the limit  $L_1(k)$  scales as  $O(\varepsilon \nu)$ , except for perturbations  $h$  proportional to  $\eta$ , for which it scales as  $O(\varepsilon \nu^2)$ ;  $L_1(k)$  is therefore always much smaller than  $\varepsilon$  and, in particular, tends

to zero with  $\nu$  i.e. as the scale separation tends to infinity. The effect of the  $k_n$  Fourier mode on scales characterized by a wave vector  $k$  verifying  $|k| \ll |k_n|$  is thus in practice negligible.

Consider now the opposite case, i.e.  $|k|$  comparable to, or larger than  $|k_n|$ . Neglecting again the contribution of the frequencies  $\omega_{n'}$ , the amplitudes  $A_{nn'}^\pm(k)$  then scale as  $k^2$ , and  $I_{nn'}^\pm(k) \sim |k| / |k_n|$ . Let now  $\theta$  be the angle between  $k$  and  $k_n$  and suppose, to simplify the discussion, that  $\cos \theta$  does not vanish. At least one of the exponentials in (40) will then be an increasing function of time provided  $|k| > |k_n| / (2 \cos \theta)$ . Take for example  $k = k_n$ ; the second exponential in (40) then increases with a characteristic time-scale  $1/(k^2 \chi)$ . This means that the first order contributions of the irregularities to the density actually become comparable to unity at this scale at characteristic times  $\tau_1 \sim -(\ln \varepsilon)/(k^2 \chi)$ ; this time probably also signals the break down of the perturbative expansion in  $\varepsilon$  for the scale  $k = k_n$ . As for the linear terms in  $t$  appearing on the right-hand side of (40), they actually contribute to  $\hat{N}_1/\hat{N}_0$  if at least one of the sets  $\sigma^\pm(k)$  is not empty. This condition is realized if  $\omega_{n'} = 0$  and  $|k| = |k_n| / (2 \cos \theta)$ .

The conclusion of this discussion is that, at first order in the amplitude of the perturbation  $h$ , a given Fourier mode  $k_n$  of  $h$  dramatically influences diffusions on scales characterized by wave vectors with modulus comparable to or larger than  $|k_n|$ , but has a negligible influence on scales characterized by wave vectors with modulus much smaller than  $|k_n|$ . We will now show that this conclusion cannot be extended to all perturbation orders and that taking into account terms of orders higher than 1 proves that  $h$  generally influences diffusions on all scales.

#### 4.3.2 Second order terms

It is straightforward to obtain from equations (34), (36), (40) and (30) explicit expressions for  $\hat{S}_2(t, k)$  and  $\hat{N}_2(t, k)/\hat{N}_0(t, k)$ . These are extremely complicated and do not warrant full reproduction here.

Of interest is that  $\hat{N}_2/\hat{N}_0$  contains contributions whose amplitudes potentially grows exponentially in time. One of these reads

$$D_1(t, k) = \sum_{n, n', \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} I_{nn'}^{\sigma_1}(k + \sigma_2 k_p) A_{pp'}^{\sigma_2}(k) J_{nn'pp'}^{\sigma_1 \sigma_3}(k) \times \\ \left[ \exp \left( i(\sigma_1 \omega_{n'} + \sigma_2 \omega_{p'})t - \left( (k_n + \sigma_1 \sigma_2 k_p)^2 + 2k \cdot (k_n + \sigma_1 \sigma_2 k_p) \right) \chi t \right) - 1 \right] \quad (42)$$

with  $\sigma_i = \pm 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) and

$$J_{nn'pp'}^{\sigma_1 \sigma_3}(k) = \frac{\exp(i\sigma_1 \sigma_3 \phi_{pp'})}{i\sigma_1(\omega_{n'} + \sigma_3 \omega_{p'}) + (k^2 - (k + \sigma_1(k_n + \sigma_3 k_p))^2) \chi}. \quad (43)$$

The right-hand sides of (42) contains four exponentials of given  $(n, n', p, p')$ ; these involve the wave vectors  $K_{np}^\pm = k_n \pm k_p$ . Let us for the moment ignore



the factors in front of these exponentials. Let  $k$  be an arbitrary wave vector and let  $\theta^\pm$  be the angle between  $k$  and  $K_{np}^\pm$ . Each of the conditions  $2k \parallel \cos \theta^\pm \rvert K_{np}^\pm \rvert$  makes one of the four exponentials an increasing function of  $t$ . At second order, the spatial scales at which diffusions are influenced by the perturbation  $h$  are thus determined, not by the  $k_n$ 's, but by the combinations  $K_{np}^\pm = k_n \pm k_p$ . Indeed, quite generally, the temporal behaviour of terms of order  $q$ ,  $q \geq 1$ , will be determined by combinations of  $q$  wave vectors  $k_n$ . For perturbations  $h$  with a rich enough spectrum, these combinations correspond to all sorts of spatial scales and, in particular, to scales much larger than those over which  $h$  itself varies. Thus,  $h$  will generally influence diffusions on all spatial scales.

Let us elaborate quantitatively on this conclusion by further exploring the behaviour of  $D_1(t, k)$ . Suppose for example that the moduli of all  $k_n$ 's are of the same order of magnitude, say  $k^*$ , but that there are some  $n$  and  $p$  for which  $\rvert K_{np}^- \rvert \sim K^* O(\nu)$ , where  $\nu \ll 1$ . The condition introduced above, which ensures that one of the exponentials involving  $K_{np}^-$  grows with  $t$ , then translates into  $\rvert k \rvert > (2/\cos \theta^-) K^* O(\nu)$ , and is realized for  $\rvert k \rvert = K^* O(\nu)$  provided  $\cos \theta^- \lesssim 1$ . Let us check now that the factors in front of the exponentials do not tend towards zero with  $\nu$ . Ignoring as before the influence of the frequencies  $\omega_q$ , the quantity  $I_{nn'}^-(k + k_p)$  (see (41)) scales as  $A_{nn'}^-(k + k_p)/k_p^2$  i.e. as  $k_p^2/k_p^2 = 1$ . The quantity  $\tilde{J}_{nn'pp'}^-(k)$  scales as  $(Q_{np}(k))^{-1} = [2k \cdot K_{np}^- - (K_{np}^-)^2]^{-1}$ . The factor in front of the exponential thus scales as  $\rvert k \rvert \parallel k_p \rvert (Q_{np}(k))^{-1}$  for perturbations  $h$  not proportional to  $\eta$ , and as  $k^2(Q_{np}(k))^{-1}$  otherwise. Taking into account that  $\rvert k \rvert \sim \rvert K_{np}^- \rvert$  and putting  $\cos \theta^- = 1$  to simplify the discussion, one finds that the factor in front of the exponentials scales as  $\rvert k_p \rvert / \rvert k \rvert = O(1/\nu)$  if  $h$  is not proportional to  $\eta$  and as  $O(1)$  otherwise. This factor therefore does not tend to zero with the separation scale parameter  $\nu$ . Actually, for perturbations which are not proportional to  $\eta$ , this factor tends to infinity as  $\nu$  tends to zero, a fact which only increases the influence of  $h$  on diffusions.

These estimates can be used to evaluate some characteristic times. For perturbations proportional to  $\eta$ , the second order term  $\varepsilon^2 D_1$  reaches unity after a characteristic time  $\tau_2^\eta \sim -(2/\nu^2 K^{*2} \chi) \ln \varepsilon$ ; for perturbations not proportional to  $\eta$ , the corresponding characteristic time is  $\tau_2 \sim -(2/\nu^2 K^{*2} \chi) \ln(\varepsilon/\nu^{1/2}) \ll \tau_2^\eta$ . These characteristic times are probably upper bound for the time at which the perturbation expansion ceases to be valid for scale  $k$ .

## 5 Influence of the irregularities on the entropies

The influence of generic metric irregularities on conditional entropies is technically extremely difficult to investigate in detail. We therefore restrict our discussion by considering only time-independent perturbations  $h$  proportional to  $\eta$  and

write:

$$h^{ij}(x) = \sum_n a_n \eta^{ij} \cos(k_n \cdot x - \phi_n). \quad (44)$$

Let us focus on the Gibbs entropy  $S_G[n]$  of the density  $n$  evaluated in Section 4. This entropy reads

$$S_G[n](t) = - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x N(t, x) \ln \left( \frac{N(t, x)}{\sqrt{\det g(t, x)}} \right). \quad (45)$$

The perturbative expansion of both  $g$  and  $N$ , together with the normalization conditions  $\int_{\mathbb{R}^2} N_m d^2x = 0$  for  $m = 1, 2$ , leads to:

$$S_G[n](t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m S_{Gm}[n](t) \quad (46)$$

with

$$\begin{aligned} S_{G0}[n](t) &= - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x N_0(t, x) \ln N_0(t, x), \\ S_{G1}[n](t) &= - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x (N_1(t, x) \ln N_0(t, x) - N_0(t, x) l_1(x)), \\ S_{G2}[n](t) &= - \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left( N_2(t, x) \ln N_0(t, x) - N_0(t, x) l_2(x) - N_1(t, x) l_1(x) + \frac{N_1^2(t, x)}{2N_0(t, x)} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Expression (27) for  $N_0$  leads to  $S_{G0}[n](t) = 1 + \ln(4\pi\chi t)$ , which is, as expected, an increasing function of  $t$ . This function is also strictly positive. A direct computation shows that  $N_1$  is an uneven function of  $x$ . Since  $N_0$  is even in  $x$ , so is  $\ln N_0$  and the contribution of  $N_1 \ln N_0$  to  $S_{G1}[n]$  vanishes identically. One finds, using (24), that:

$$S_{G1}[n](t) = - \sum_n a_n \cos \phi_n \exp(-k_n^2 \chi t). \quad (48)$$

The first order contribution to the Gibbs entropy may thus be a decreasing or an increasing function of time, and its sign is not fixed either. Each term in the sum tends to zero on a characteristic time  $T_n = 1/(\chi k_n^2)$ . Suppose the diffusion is observed at scale  $k$  with  $|k| = |k_n| + O(v)$ . The relaxation time  $T_n$  is then much smaller than the typical diffusive time  $T = 1/(\chi k^2)$  at scale  $k$  and the first order contribution to  $S_G[n]$  can then be neglected. This echoes the conclusion obtained above in Section 4 that, at first order in  $\varepsilon$ , the effects of metric perturbations are confined to scales comparable to the variation scales of the perturbations.

The second order term  $S_{G2}[n]$  cannot be computed exactly. Considering the conclusions of Section 4, one nevertheless expects increasing, possibly exponential functions of the time  $t$  to contribute to  $S_{G2}[n]$ , the characteristic time scale  $T_{nn'}$  of these functions being related to the differences  $k_n - k_{n'}$  in wave numbers of

the metric perturbation by  $T_{nn'} = 1/(\chi(k_n - k_{n'})^2)$ . This expectation can be confirmed by computing exactly the contribution of  $N_1 l_1$  to  $S_{G2}[n]$ . Naturally, given a certain wave number  $k$ ,  $T_{nn'}$  may be comparable to  $T = 1/(\chi k^2)$ , even if both  $|k_n|$  and  $|k_{n'}|$  are much larger than  $|k|$ . The behaviour of the Gibbs entropy thus confirms that, at second order, metric irregularities influence diffusions at all scales, including scales much larger than the typical variation scales of the metric perturbation.

## 6 Conclusion

We have investigated how metric irregularities influence Brownian motion on a differential manifold. We have performed explicit perturbative calculations for nearly flat 2D manifolds and reached the conclusion that the metric irregularities have a cumulative effect on Brownian motion; more precisely, we have found that the relative difference of the spatial Fourier components of the densities generated by a Brownian motion on the flat surface and a Brownian motion on the irregular surface grows exponentially with time on all spatial scales, including scales much larger than those characteristic of the metric perturbation; entropy behavior has also been considered and characteristic times have been derived.

Let us conclude this article by mentioning some problems left open for further study. As stated in the introduction, many biological phenomena involve lateral diffusions on 2D interfaces. The results of this article suggest that the fluctuations of the interfaces profoundly affect these lateral diffusions; the discrepancies between real diffusions on irregular interfaces and idealized diffusions on highly regular surfaces are therefore probably observable and the biological consequences of these discrepancies should be carefully studied. On the theoretical side, one should envisage a non perturbative treatment of at least some of the problems studied in this article; this is probably best achieved through numerical simulations; a first step would be to confirm numerically, at least for 2D diffusions, the characteristic time estimates we have derived here. Finally, the case of relativistic diffusions in fluctuating space-times is certainly worth investigating, notably in a cosmological context.

## References

- [1] S. Abarbanel and A. Ditkowski. Asymptotically stable fourth-order accurate schemes for the diffusion equation on complex shapes. *J. Comput. Phys.*, 133:279, 1996.
- [2] L. J. S. Allen. *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Prentice Hall, 2003.

- [3] J. Braga, J. M. P. Desterro and M. Carmo-Fonseca. *Mol. Bio. Cell*, 15:4749-4760, 2004.
- [4] A. Brünger, R. Peters and K. Schulten. Continuous fluorescence microphotolysis to observe lateral diffusion in membranes: theoretical methods and applications. *J. Chem. Phys.*, 82:2147, 1984.
- [5] C. Chevalier and F. Debbasch. Fluctuation-Dissipation Theorems in an expanding Universe. *J. Math. Phys.*, 48:023304, 2007.
- [6] M. Christensen. How to simulate anisotropic diffusion processes on curved surfaces. *J. Comput. Phys.*, 201:421-435, 2004.
- [7] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov and A. T. Fomenko. *Modern geometry - Methods and applications*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [8] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics **46**, SIAM, 2005.
- [9] M. Emery. *Stochastic calculus in manifolds*. Springer-Verlag, 1989.
- [10] N. S. Goel and N. Richter-Dyn. *Stochastic Models in Biology*. The Blackburn Press, 2004.
- [11] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland Mathematical Library, 2nd edition, 1989.
- [12] K. Itô. On stochastic differential equations on a differentiable manifold i. *Nagoya Math. J.*, 1:35-47, 1950.
- [13] K. Itô. On stochastic differential equations on a differentiable manifold ii. *MK*, 28:82-85, 1953.
- [14] H. P. McKean. *Stochastic integrals*. Academic Press, New York and London, 1969.
- [15] D. Mitra and Q. Wang. Stochastic traffic engineering for demand uncertainty and risk-aware network revenue management. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 13(2):221-233, 2005.
- [16] J. D. Murray. *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, Mathematical Biology, Springer, 2002.
- [17] S. Nehls et al. Dynamics and retention of misfolded proteins in native membranes. *Nat. Cell. Bio.*, 2:288-295, 2000.
- [18] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 5th edition, 1998.

- [19] I. F. Sbalzarini, A. Hayer, A. Helenius and P. Koumoutsakos. Simulations of (an)isotropic diffusion on curved biological interfaces. *Biophysical J*, 90(3):878-885, 2006.
- [20] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel and N. Ito. Discrete stochastic models for traffic flow. *Phys. Rev. E*, 51(4):2939-2949, 1995.
- [21] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004.
- [22] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 2004.
- [23] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1992.

C. Chevalier and F. Debbasch: Is matter an emergent property of space-time? Submitted for publication to the Proceedings of the International Conference on Complex Systems, Boston, 2007 ([26]).

# Is Matter an emergent property of Space-Time?

**C. Chevalier and F. Debbasch**

Université Pierre et Marie Curie-Paris6, UMR 8112, ERGA-LERMA,  
3 rue Galilée, 94200 Ivry, France.  
chevalier\_claire@yahoo.fr, fabrice.debbasch@gmail.com

The first, fully non linear, mean field theory of relativistic gravitation has been developed in 2004. The theory makes the striking prediction that averaging or coarse graining a gravitational field changes the matter content of space-time. A review of the general theory is presented, together with new calculations that highlight this effect on black holes of the Reisner-Nordström (RN) family. Explicit expressions for the equation of state and for the energy and charge densities of the apparent matter surrounding the coarse grained black holes are given. In particular, the Schwarzschild black hole, which is a vacuum solution of Einstein field equations, is shown to appear after coarse graining as surrounded by an apparent matter whose equation of state strongly resembles the equation of state commonly postulated for cosmological dark energy. Thermodynamical aspects are also investigated. Taken together, these new results suggest that matter and charge may be properties of the space-time which only emerge after a certain coarse graining has been performed.

## 1 Introduction

Developing a mean field theory for general relativity has long been the subject of active research ([9, 13, 10, 11, 20, 1, 2]). This problem is of undeniable theoretical interest, but it is also of real practical importance because finite precision effects in astrophysical observations of relativistic objects and in observational

cosmology can only be modeled properly through a mean field theory of relativistic gravitation ([8]).

The last three years have witnessed the construction of the first general mean field theory for Einstein gravitation ([5, 6]). The theory makes the striking prediction that averaging or coarse graining a gravitational field changes the matter content of space-time. In particular, the net ‘large scale’ effect of the averaged upon, ‘small scale’ gravitational degrees is to contribute an apparent ‘large scale’ matter which self consistently generates the coarse grained gravitational field. This matter is charged if the gravitational field is coupled to an electromagnetic field. These remarkable predictions raise the intriguing possibility that matter may simply be an emergent property of space time.

We first introduce the general theory mean field theory. We then present coarse grainings of both the Schwarzschild and the extreme Reisner-Nordström black holes. We derive explicit expressions for the equation of state and for the energy and charge densities of the apparent matter surrounding the coarse grained black holes. In particular, the Schwarzschild black hole, which is a vacuum solution of Einstein field equations, is shown to appear after coarse graining as surrounded by an apparent matter whose equation of state strongly resembles the equation of state commonly postulated for cosmological dark energy. We also investigate thermodynamical aspects and prove that the envisaged coarse graining transforms the extreme RN black hole, which has a vanishing temperature, into a black hole of non vanishing temperature.

## 2 A mean field theory for general relativity

Let  $\mathcal{M}$  be a fixed ‘base’ manifold and let  $\Omega$  be an arbitrary probability space. Let  $g(\omega)$  be an  $\omega$ -dependent Lorentzian metric defined on  $\mathcal{M}$ ; let also  $A(\omega)$  be an  $\omega$ -dependent 4-potential, with associated current  $j(\omega)$ . Each triplet  $S(\omega) = (\mathcal{M}, g(\omega), A(\omega))$  represents a physical space-time; we denote by  $\Sigma$  the collection of all these space-times. Each member  $S(\omega)$  of  $\Sigma$  is naturally equipped with the Levi-Civita connection  $\Gamma(\omega)$  of the metric  $g(\omega)$  [19]; to  $S(\omega)$  is also associated a stress-energy tensor  $\mathcal{T}(\omega)$  related to the metric  $g(\omega)$ , the connection  $\Gamma(\omega)$  and  $A(\omega)$  through Einstein equation; we write  $\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{T}_{(A(\omega), g(\omega))} + \mathcal{T}_m(\omega)$ , where  $\mathcal{T}_{(A(\omega), g(\omega))}$  represents the stress-energy tensor generated by  $A(\omega)$  in  $g(\omega)$  and  $\mathcal{T}_m(\omega)$  represents the stress-energy of other matter fields.

It has been shown in ([5]) that the collection  $\Sigma$  of space-times can be used to define a single, mean or coarse grained space-time  $\bar{S} = (\mathcal{M}, \bar{g}, \bar{A})$  where the metric  $\bar{g}$  and the potential  $\bar{A}$  are the respective averages of the metrics  $g(\omega)$  and of the potentials  $A(\omega)$  over  $\omega$ ; thus, for all points  $P$  of  $\mathcal{M}$ ,  $\bar{g}(P) = \langle g(P, \omega) \rangle$  and  $\bar{A}(P) = \langle A(P, \omega) \rangle$ , where the brackets on the right-hand side indicate an average



over the probability space  $\Omega$ .

The connection of the mean space-time  $\bar{S}$  is simply the Levi-Civita connection associated to the metric  $\bar{g}$  and will be conveniently called the mean or coarse grained connection. Since the relations linking the coordinate basis components  $g_{\mu\nu}$  of an arbitrary metric  $g$  to the Christoffel symbols  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  of its Levi-Civita connection are non-linear, the Christoffel symbols of the mean connection are *not* identical to the averages of the Christoffel symbols associated to the various space-times  $S(\omega)$ .

The metric  $\bar{g}$  and its Levi-Civita connection  $\bar{\Gamma}$  define an Einstein tensor  $\bar{E}$  for the coarse grained space-time  $\bar{S}$ . This tensor defines, via Einstein equation, the stress-energy tensor  $\bar{\mathcal{T}}$  for  $\bar{S}$ . Because Einstein equation is non linear in both the metric and the electromagnetic potential,  $\bar{\mathcal{T}}^{a\beta}$  is generally different from  $\langle \mathcal{T}_m^{a\beta}(\omega) \rangle + \mathcal{T}_{\bar{A}, \bar{g}}^{a\beta}$ . The additional, generally non vanishing tensor field  $\Delta\mathcal{T} = \bar{\mathcal{T}} - \langle \mathcal{T}_m(\omega) \rangle - \mathcal{T}_{\bar{A}, \bar{g}}$ , can be interpreted as the stress-energy tensor of an ‘apparent matter’. This apparent matter simply describes the cumulative effects of the averaged upon (small scale) fluctuations of the gravitational and electromagnetic fields on the (large scale) behaviour of the coarse grained gravitational field. In particular, the vanishing of  $\mathcal{T}(\omega)$  for all  $\omega$  does not necessarily imply the vanishing of  $\bar{\mathcal{T}}$ . The mean stress-energy tensor  $\bar{\mathcal{T}}$  can therefore be non vanishing in regions where the unaveraged stress-energy tensor actually vanishes.

The Maxwell equation relating the electromagnetic potential to the electromagnetic current also couples the electromagnetic and the gravitational field non linearly; the mean current  $\bar{j}$  associated to  $\bar{A}$  in  $\bar{g}$  does not therefore coincide with the average  $\langle j(\omega) \rangle$ . In particular, a region of space-time where  $j(\omega)$  vanishes for all  $\omega$  is generally endowed with a non vanishing mean current  $\bar{j}$ .

Let us finally mention that the averaging scheme just presented is the only one which ensures that the motions in a mean field can actually be interpreted, at least locally, as the averages of ‘real’ unaveraged motions. This very important point is fully developed in ([6]).

### 3 Example 1: Coarse graining a Schwarzschild black hole

#### 3.1 Determination of the coarse grained space-time

We consider a collection of space-times ([7, 4]) which describes a single Schwarzschild black hole observed with finite precision measurements of the three spatial Kerr-Schild coordinates. More precisely, this collection is defined as

an ensemble of space-times  $\mathcal{S}(\omega)$ , each member of the ensemble being equipped with the metric  $g(t, \mathbf{r}, \omega)$  given by:

$$ds_\omega^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 - \frac{2M}{|\mathbf{r} - \omega|} \left( dt - \frac{(\mathbf{r} - \omega) \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \omega|} \right)^2 \quad (1)$$

The parameter  $M$  represents the mass of the black hole and  $\mathbf{r}$  stands for the set of three ‘spatial’ coordinates  $x, y, z$ . The set  $\Omega$  of possible values for  $\omega$  is taken to be the Euclidean 3-ball of radius  $a$ :  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3; \omega^2 \leq a^2\}$ . The probability measure on  $\Omega$  is defined by its uniform density  $p(\omega) = 3/(4\pi a^3)$  with respect to the Lebesgue measure  $d^3\omega$  and all 3-D scalar products and norms in (1) are Euclidean. The electromagnetic field vanishes identically in all space-times  $\mathcal{S}(\omega)$ . The coarse graining is characterized by the dimensionless parameter  $x = a/M$ .

The exact expression of the mean metric  $\bar{g}$  corresponding to this collection can be obtained for every  $a < r$ . The mean metric expressed in Kerr-Schild coordinates is given by:

$$\begin{aligned} \langle ds^2 \rangle = & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{2M}{r} - \frac{6a^2 M}{5r^3}\right) \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}\right)^2 - \left(1 + \frac{2a^2 M}{5r^3}\right) d\mathbf{r}^2 \\ & + \left[ -\frac{3M}{2r} - \frac{3Mr}{2a^2} + \frac{3M}{4a^3 r^2} (a^2 - r^2)^2 \ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right) \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

One can construct a new set of coordinates  $(\tau, \rho, \theta, \phi)$  (conveniently called Schwarzschild coordinates) which makes the static and spherically symmetric character of the mean space-time apparent. The metric then takes the form:

$$\langle ds^2 \rangle = F(\rho) d\tau^2 - G(\rho) d\rho^2 - \rho^2 d\Gamma^2 \quad (3)$$

where  $d\Gamma^2$  stands for the usual volume element on the unit sphere  $S^2$ . The exact expressions of both  $F(\rho)$  and  $G(\rho)$  need not be reproduced here. We mention however that  $\rho_H = 2M\sqrt{1+x^2/20}$ , which corresponds to  $r = 2M$ , is a first order pole of  $G$  and a zero of  $F$ ; it is also the first encountered singularity of  $G$  when coming from infinity in  $\rho$ -space. The coarse grained space-time is thus a black hole of horizon radius  $\rho_H$ .

### 3.2 Energetics of the coarse grained black hole

**Stress-energy tensor** The exact expressions of the Schwarzschild components of the mean stress-energy tensor are too complicated to warrant reproduction here. We just present the approximate expressions of these components, which are valid

when  $a \ll r$ :

$$\begin{aligned} 8\pi \bar{\mathcal{T}}_0^0 = \varepsilon &= -\frac{6a^2 M^2}{5\rho^6}; & 8\pi \bar{\mathcal{T}}_1^1 = -p_1 &= -\frac{6a^2 M^2}{5\rho^6}; \\ 8\pi \bar{\mathcal{T}}_2^2 = -p_2 &= \frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}; & 8\pi \bar{\mathcal{T}}_3^3 = -p_3 &= \frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}. \end{aligned} \quad (4)$$

This shows that the coarse graining procedure endows the original vacuum space-time with a non vanishing stress-energy tensor  $\bar{\mathcal{T}}$ . This tensor describes how the averaged upon (small scale) degrees of freedom of the Schwarzschild gravitational field can be viewed as an apparent matter which acts as the effective ‘source’ of the coarse grained (large scale) field. The apparent matter is characterized by a negative energy density and an anisotropic pressure tensor. Note that all energy conditions (*i.e.* the weak, strong and dominant energy conditions ([19])) are violated by the mean stress energy tensor  $\bar{\mathcal{T}}$ . Finally, by taking the trace of Einstein’s equation, the scalar curvature  $\bar{\mathcal{R}}$  of the mean space-time outside the horizon can be obtained directly from the exact components of  $\bar{\mathcal{T}}$ ; one finds, at second order in  $a/\rho$ :

$$\bar{\mathcal{R}} = -8\pi \bar{\mathcal{T}}^\mu_\mu = -\frac{12a^2 M^2}{5\rho^6}. \quad (5)$$

The coarse graining thus endows the space-time with a negative scalar curvature. This inevitably evokes the recent observations ([18]) of a positive, non-vanishing cosmological constant  $\Lambda$ , which also endows vacuum regions of space-time with a negative scalar curvature ([15])  $\mathcal{R}_\Lambda = -4\Lambda$ . The similarity and differences between the coarse grained space-time constructed here and space-times of cosmological interest are further explored in [7].

**Mass and temperature of the coarse grained black hole** We have just seen that the coarse graining changes the repartition of energy in space-time. A standard asymptotic analysis at spatial or null infinity shows that the coarse grained space-time described by (3) is asymptotically flat and that its mass is identical to  $M$ , the mass of the unaveraged Schwarzschild black hole. This result is true for all values of  $a$  (including those superior to  $2M$ ).

The temperature  $T(x, M)$  of the coarse grained black hole can be obtained by studying the natural topology of the associated Euclidean space time ([19]). One obtains

$$T(x, M) = -\frac{1}{12\pi M} \frac{x^3}{-x\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{1+x/2}{1-x/2}\right)}. \quad (6)$$

One finds that  $T(x, M) \approx \frac{1}{8\pi M} \left(1 + \frac{x^2}{20}\right)$  at order two in  $x$ ; this confirms that  $T(0, M)$  coincides with the Hawking temperature  $1/8\pi M$  ([19]) of the Schwarzschild black hole.

## 4 Example 2: Coarse graining of an extreme Reisner-Nordström black hole

**Type of coarse graining** Extreme black holes are thermodynamically particularly interesting because they have a vanishing temperature. One can thus wonder if a coarse graining similar to the one applied above to the Schwarzschild black hole would not transform the extreme black hole into a black hole of finite temperature. The answer is negative because the coarse grained space-time turns out not to be a black hole. There exist however a simple complex generalization of the above coarse graining which does transform the real extreme Reisner-Nordström black hole into a real black hole of non vanishing temperature. Note that complex space-times have been considered in a wide variety of context, which range from spinor and twistor theory [16] to black hole physics [3] and string theory [17]; the natural occurrence of complex space-times in the present problem therefore comes as no surprise.

Consider a collection of complex space-times  $\mathcal{S}(\omega)$  equipped with the metric

$$ds_\omega^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 - h_\omega(r) \left( dt - \frac{(\mathbf{r} - i\omega) \cdot d\mathbf{r}}{R(\mathbf{r}, \omega)} \right)^2, \quad (7)$$

with  $R(\mathbf{r}, \omega) = (r^2 - \omega^2 - 2i\mathbf{r} \cdot \omega)^{1/2}$ , and  $h_\omega(r) = 1 - \left(1 - \frac{M}{R(\mathbf{r}, \omega)}\right)^2$ . The four space-time coordinates  $t$  and  $\mathbf{r}$  are still assumed real and the probability space  $\Omega$  to which the parameter  $\omega$  belongs is the same as in Section 3. The principal determination is retained in the definition of  $R$ , with cut along the positive imaginary axis. Note that the metric corresponding to  $\omega = 0$  is the real extreme RN metric in Kerr-Schild coordinates. The only matter outside each black hole is an electromagnetic field of 4-potential

$$A_t(\omega) = -\frac{M}{R} \quad A_x(\omega) = \frac{M}{R^2} h_\omega(r) x \quad (8)$$

$$A_y(\omega) = \frac{M}{R^2} h_\omega(r) y \quad A_z(\omega) = \frac{M}{R^2} h_\omega(r) z. \quad (9)$$

The associated current  $j(\omega)$  vanishes identically but the total charge of each space-time is  $Q = M$ .

One can obtain an explicit expression of the metric  $\bar{g}$  of the complex coarse grained space-time  $\bar{\mathcal{S}}$  for all  $r > a$ . This metric is real and can be put into the manifestly static and spherically symmetric form (3). A standard analysis then shows that the coarse grained space-time is a real black hole; the horizon radius  $\rho_H(x, M)$  is given at second order in  $x$  by  $\rho_H(x, M) \simeq M \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{3x^2}{\sqrt{10}} \right)$ .

**Mass and charge repartition** It is straightforward to evaluate the potential  $\bar{A} = \langle A(\omega) \rangle$  of  $\bar{S}$  and the corresponding stress-energy tensor  $T_{\bar{A}, \bar{g}}$ . One can also evaluate the total stress-energy tensor  $\bar{\mathcal{T}}$  of  $\bar{S}$ . The difference  $\Delta\bar{\mathcal{T}}$  yields the stress-energy tensor of the apparent matter describing the net large scale effect of the averaged upon, small scale degrees of freedom. One finds, at second order in  $a/\rho$ :

$$\begin{aligned} 8\pi (\Delta\bar{\mathcal{T}})_0^0 &= a^2 \left( \frac{4M^3}{5\rho^7} - \frac{4M^4}{5\rho^8} \right); & 8\pi (\Delta\bar{\mathcal{T}})_1^1 &= a^2 \left( \frac{4M^2}{5\rho^6} - \frac{4M^3}{5\rho^7} \right); \\ 8\pi (\Delta\bar{\mathcal{T}})_2^2 &= a^2 \left( -\frac{8M^2}{5\rho^6} + \frac{24M^3}{5\rho^7} - \frac{2M^4}{\rho^8} \right); & 8\pi (\Delta\bar{\mathcal{T}})_3^3 &= 8\pi (\Delta\bar{\mathcal{T}})_2^2. \end{aligned} \quad (10)$$

However, a direct calculation shows that the total mass is unaltered by the coarse graining.

The 4-current  $\bar{j}$  in  $\bar{S}$  can be evaluated from  $\bar{A}$  and  $\bar{g}$ . One finds that  $\bar{\mathbf{j}} = 0$  but  $\bar{j}^0 = \frac{a^2 M^3 (2 - 3\rho/M)}{5\pi\rho^7}$  at second order in  $a/\rho$ . A direct computation shows that the total charge of  $\bar{S}$  is equal to  $Q = M$ , the charge of the original extreme black hole. Note however that the charge density  $\bar{j}^0$  and  $Q$  are of opposite signs outside the horizon.

**Temperature** The temperature  $T(x, M)$  of the coarse grained black hole can be obtained, as usual, by considering the Euclidean space-time associated to the region outside the horizon [19]. One obtains, at second order in  $x$ , that  $T(x, M) \simeq \frac{x}{2\sqrt{5}\pi M} - \frac{x^2}{5\pi M}$ . The coarse graining over complex space-time degrees of freedom has thus transformed the extreme real RN black hole of vanishing temperature into a real black hole of non vanishing temperature.

## Bibliography

- [1] Buchert, T., 2000, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 32:105–26.
- [2] Buchert, T., 2001, On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 33:1381–405.
- [3] Burinskii, A., 2003, Complex Kerr geometry and nonstationary Kerr solutions, *Phys. Rev. D*, 67:124024.
- [4] Chevalier, C., Bustamante, M. and Debbasch, F., 2007, Thermal statistical ensembles of black holes, *Phys. A*, 376:293–307.

- [5] Debbasch, F., 2004, *What is a mean gravitational field?* *Eur. Phys. J. B* **37**(2), p.257–270.
- [6] Debbasch, F., 2005 *Mean field theory and geodesics in General Relativity* *Eur. Phys. J. B* **43**(1), p.143–154.
- [7] Debbasch, F. and Ollivier, Y., 2005, *Observing a Schwarzschild black hole with finite precision* *Astron. Astrophys.* **433**(2), p.397–404.
- [8] Ellis, G. F. R. and van Elst, H., 1998, *Cosmological Models in Cargese Lecture 1998*, arXiv:gr-qc/9812046
- [9] Futamase, T., 1991, *Prog. Theor. Phys.*, 86:389–99.
- [10] Futamase, T., 1993, *Prog. Theor. Phys.*, 581–97.
- [11] Futamase, T., 1996, Averaging of a locally inhomogeneous realistic universe. *Phys. Rev. D*, 53:681–9.
- [12] Ishibashi, A. and Wald, R. M., Can the acceleration of our Universe be explained by the effects of inhomogeneities? *arXiv:gr-qc/0509108*
- [13] Kasai, M., 1992, Construction of Inhomogeneous universes which are Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker on average. *Phys. Rev. D*, 69:2330–2.
- [14] Kolb, E. W., Matarese, S. and Riotto, A., 2005, On cosmic acceleration without dark energy. *arXiv:astro-ph/056534v1*.
- [15] Peebles, P.J.E., 1993, *Princeton Series in Physics* (Princeton University Press, Princeton)
- [16] Penrose, R. and Rindler, W., 1984, *Spinors and space-time*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics.
- [17] Polchinski, J., 2001, *String theory*, Cambridge University press, Cambridge.
- [18] Spergel, D. N. et al., 2003, First Year Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148:175.
- [19] Wald, R. M., 1984, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago).
- [20] Zalaletdinov, R., 1997, Averaging problem in general relativity, macroscopic gravity and using Einstein's equation in cosmology. *Bull. Astron. Soc. India*, 25:401–416.